

**COMISIÓN CHILENA DEL COBRE**  
**DIRECCIÓN DE ESTUDIOS Y POLÍTICAS PÚBLICAS**

# Incorporación de riesgo a la evaluación de proyectos mineros

---

DOCUMENTO DE TRABAJO<sup>1</sup>  
Erik Heimlich M.  
Dirección de Estudios y Políticas Públicas  
Comisión Chilena del Cobre  
DE/11/2009

---

<sup>1</sup> Consultas, sugerencias y comentarios pueden dirigirse a [eheimlic@cochilco.cl](mailto:eheimlic@cochilco.cl)

## Contenido

INTRODUCCIÓN.....	3
Estructura del informe .....	6
Resumen de conclusiones.....	6
Capítulo 1 Evaluación de proyectos mineros de cobre .....	8
Flujos de Caja Descontados y Parámetros de Evaluación .....	8
Valoración a través de opciones reales.....	11
Capítulo 2 Evaluación de proyectos mineros flexibles.....	14
Modelo de una mina de cobre.....	14
Método Montecarlo de Mínimos Cuadrados y su aplicación a una mina de cobre. ....	15
Capítulo 3 Modelos de precios y evaluación de proyectos.....	19
Movimiento Geométrico Browniano (MGB).....	19
Modelo Reversión a la Media un Factor (RM1) .....	24
Modelo de Reversión a la Media de dos Factores (RM2) .....	29
Capítulo 4 Conclusión .....	38
Trabajos citados.....	40

## INTRODUCCIÓN

La evaluación de proyectos mineros de cobre enfrenta hoy en día un escenario complejo, debido no sólo a la incertidumbre de corto plazo, sino que en mayor medida a la que rodea las perspectivas de largo plazo. Esta incertidumbre se refleja en la variedad de opiniones respecto del precio de largo plazo, y también en la rapidez con que se suceden las actualizaciones de dichas estimaciones. La mejora sustancial en las perspectivas de largo plazo, sin embargo, se ve contrarrestada por alzas de magnitud semejante en los costos de inversión y los costos de operación proyectados. El problema es que la incertidumbre que rodea los precios no es equivalente a la de los costos. Los montos de inversión requeridos para poner en marcha un proyecto son relativamente conocidos, y al menos una parte de los costos de operación dependen de variables mineras relativamente determinadas. En contraste, es difícil argumentar que no exista una cierta probabilidad de que la estimación del precio de largo plazo pueda caer en cinco años más a los niveles de cinco años atrás.

La técnica más habitual de evaluación de proyectos, que busca estimar el valor presente de una inversión a través del cálculo de flujos descontados de caja, funciona bien en un ambiente donde la incertidumbre está relativamente acotada, cuando los precios futuros posibles se concentran suficientemente alrededor de un valor esperado y los márgenes son sustanciales. El ajuste por riesgo se realiza, en este marco, recurriendo a una tasa de descuento que incorpora una medida del riesgo sistemático de la inversión y el valor de tiempo del dinero. En un ambiente de mayor incertidumbre, el valor esperado es un mal predictor de los flujos de caja futuros<sup>2</sup> (y no existe uno mejor), y el riesgo de los diferentes proyectos no se puede resumir en una única tasa de descuentos. Ajustar la tasa de descuento a las peculiaridades de un proyecto es una tarea difícil, tanto teóricamente como en la práctica.

El dilema es especialmente acuciante para aquellas inversiones que sólo se vuelven rentables en un ambiente de mayor optimismo de largo plazo y que habrían sido consideradas no económicas unos años atrás.

Frente a este dilema surge la necesidad de una evaluación más meticulosa de las oportunidades y riesgos de un proyecto, y la consideración de alternativas operacionales que puedan otorgar flexibilidad en un ambiente cambiante. La posibilidad de postergar decisiones de negocios importantes para el desarrollo de un proyecto, generando alternativas de diferentes cursos de acción, en la medida en que el paso del tiempo reduce la incertidumbre con la llegada de nueva información, adquiere mayor valor en un escenario de incertidumbre. Sin embargo, la técnica de evaluación tradicional no se adecúa a este objetivo pues, por definición, la flexibilidad cambia la naturaleza del riesgo de un proyecto.

---

<sup>2</sup> Los precios posibles, con un determinado margen de confianza, tienen una alta dispersión.

La postergación de decisiones y la generación de alternativas adoptan diversas formas en la minería del cobre, como las expansiones por etapas, las alteraciones de los planes mineros, los cierres anticipados o temporales, o la postergación de la inversión a un momento óptimo.

La técnica de los flujos de caja descontados puede ampliarse para permitir una mejor aproximación al riesgo e incorporar y valorar la flexibilidad operacional de un proyecto, ya sea a través de árboles de decisión o de otras alternativas<sup>3</sup>.

Alternativamente, el análisis de “opciones reales”, una adaptación de la teoría financiera a la evaluación de proyectos de inversión, permite lidiar, al menos en teoría, con varios de los problemas que se enfrentan: un ajuste apropiado al riesgo de cada componente de los flujos de caja de un proyecto, y ante la flexibilidad operacional.

Tradicionalmente basado en argumentos de inexistencia de oportunidades de arbitraje, el análisis de opciones reales permite determinar el valor de un proyecto en función de los factores de riesgo involucrados, apropiadamente ajustados por riesgo según parámetros de mercado. La definición de las características dinámicas y estocásticas del valor del proyecto permite valorar “opciones reales”, esto es, las alternativas que permite la flexibilidad inherente a un proyecto, de la misma manera en que se valoran opciones de tipo financiero.

Sin embargo, los beneficios de esta aproximación están limitados por la mayor dificultad conceptual, las dificultades de implementación, y la necesidad de contar con una modelación acertada de los factores de riesgo involucrados.

Las dificultades conceptual es un problema que se resuelve con la familiarización y difusión de las metodología; la complejidad de la implementación dificulta la evaluación de modelos realistas, pero disminuye con la creación de nuevos métodos y su estandarización<sup>4</sup>; la modelación del precios del cobre y otros factores de riesgo, asimismo, ha ido clarificándose, lo que aumenta la confianza en los resultados.

El principal objetivo de este estudio es implementar una metodología de análisis de opciones reales en la minería del cobre que se basa en simulaciones de Montecarlo, que permite aproximaciones más realistas al problema sin un aumento excesivo de la complejidad, como es el caso de otras metodologías, aplicándola a un modelo de la dinámica del precio del cobre suficientemente realista, esto es, que reproduce bien las características empíricas de la serie de precios spot y futuros del cobre.

---

<sup>3</sup> Por ejemplo, la “aproximación reactiva”, que se plantea en (Zhang, y otros 2006), que busca calcular el valor adicional que se obtiene con la actualización regular de planes mineros, en un ambiente de expectativas cambiantes de precios, en el marco de la técnica de flujos de caja descontados.

<sup>4</sup> Como se verá más adelante, el método de “Mínimos cuadrados de Montecarlo”, propuesto en (Longstaff y Schwartz 2001) para la valorización de opciones americanas, aplicado a opciones reales permite implementar modelos realistas con menores demandas de implementación.

Esta metodología ha sido aplicada a modelos simples del precio del cobre (Movimiento Geométrico Browniano), pero que fallan en diferentes aspectos en su descripción de la dinámica del precio del cobre. También ha sido aplicada a modelos más complejos, con diferentes componentes de riesgo, como en (Gamba 2003) o en (Cortazar, Gravel y Urzua 2006), que incluyen el precio, retorno por conveniencia, tasa de interés.

En el presente estudio la metodología es aplicada a tres modelos de precios, incluyendo el simple movimiento geométrico browniano y el modelo de reversión a la media (Ornstein-Uhlenbeck), ambos de un factor de riesgo, y el modelo de (Gibson y Schwartz 1990), que puede considerarse una combinación de los anteriores y que logra una buena aproximación a la dinámica empírica del precio del cobre y sus precios futuros.

La metodología se aplica a una mina de cobre tipo, presentada en (Brennan y Schwartz 1985), lo que permite utilizar resultados de otros estudios como referencia. Esta mina tipo presenta reservas, costos y nivel de producción fijos, así como la flexibilidad de cerrar temporalmente o abandonar la producción definitivamente, decisiones que tienen costos asociados. La metodología, sin embargo, es lo suficientemente flexible para ampliar el modelo de mina de cobre en otras direcciones, que constituyen vías de investigación futuras, como la incorporación de incertidumbre en parámetros mineros (reservas, leyes de mineral), costos de operación variables o inciertos, y estructuras tributarias complejas, así como la incorporación de otras formas de flexibilidad operacional.

Como las opciones reales de la mina de cobre tienen la forma de opciones de tipo americano, pues pueden ejercerse en cualquier momento, la metodología aplicada, siguiendo a (Cortazar, Gravel y Urzua 2006), se basa en la propuesta pionera de (Longstaff y Schwartz 2001) de usar simulaciones de Montecarlo para la valorización de opciones de tipo americano, recurriendo a una estimación por mínimos cuadrados del valor de continuación, según se explica en el texto.

La implementación de la metodología requiere de los siguientes pasos:

- Definición de un modelo de los factores de riesgo involucrados, principalmente del precio del cobre. En este estudio se usan tres modelos diferentes de precio, que progresivamente reflejan mejor el comportamiento empírico del precio del cobre y de los precios de contratos de futuros. En los modelos de precio está implícito el descuento por riesgo adecuado a cada factor de riesgo.
- Estimación de los parámetros del modelo de precio y otros factores de riesgo. En este estudio se usan los parámetros obtenidos en diversos estudios previos, para efectos de comparación.
- Implementación de la aproximación de (Longstaff y Schwartz 2001) para la valorización de opciones de tipo americano a un problema de opciones reales. Para ello, en este estudio se sigue la propuesta de (Cortazar, Gravel y Urzua 2006).
- Elaboración de un programa que permita realizar las simulaciones. En este estudio el programa se implementa en MATLAB®, considerando el modelo de mina de cobre de (Brennan y Schwartz 1985).

- Finalmente, se realizan las simulaciones, sensibilizando para diferentes valores de los parámetros.

Una vez implementada la metodología de evaluación de opciones reales, el presente estudio busca lograr un segundo objetivo: analizar los resultados de las simulaciones para determinar en qué medida la flexibilidad operacional es importante, frente a diferentes escenarios obtenidos de la sensibilización de parámetros del modelo de precios. Para ello se comparan los resultados del análisis de opciones reales con los que se obtendrían si la mina se evaluara usando sólo el valor esperado del precio, y sin considerar la posibilidad de cierre temporal o abandono.

Además, la implementación de tres diferentes modelos de precio, con diferente capacidad de capturar las regularidades empíricas del precio del cobre y de los precios de los contratos de futuros, permite dimensionar la importancia de una correcta aproximación a la modelación del precio del cobre.

Finalmente, una comparación directa entre la aproximación de opciones reales a la evaluación de proyectos mineros, y la alternativa tradicional de flujos descontados de caja es difícil de hacer cuantitativamente, puesto que en el caso de los flujos descontados de caja, algunas de las decisiones de modelación son difíciles de reproducir, como la elección de una tasa de descuento apropiada para el proyecto que fuera consistente con el modelo de opciones reales. Pero sí es posible hacer un examen más cualitativo de las diferencias entre ambas aproximaciones, lo que también se discute en el estudio.

## **Estructura del informe**

En el primer capítulo de este informe se realiza una breve descripción de la metodología tradicional de evaluación de proyectos (a través de flujos de caja descontados) y de sus dificultades, y se la contrapone en términos generales a la aproximación del análisis de opciones reales. En el segunda capítulo se presenta un modelo de mina de cobre (Brennan y Schwartz 1985) que incorpora flexibilidad operacional y se describe la aproximación de opciones reales para su valorización, aplicando una metodología basada en las simulaciones de Montecarlo (Longstaff y Schwartz 2001), (Cortazar, Gravet y Urzua 2006), (Gamba 2003). En el tercer capítulo se presentan diferentes modelos de precios para el cobre, con diferente grado de ajuste a las características empíricas del precio al costo de una complejidad creciente, y se obtienen los resultado de valorización de la mina de cobre para diferentes valores de los parámetros, comparando los valores obtenidos con los de una mina sin flexibilidad evaluada considerando el valor esperado del precio para cada modelo.

## **Resumen de conclusiones**

Los resultados obtenidos de una aplicación del análisis de opciones reales a una mina de cobre permiten, por una parte, mostrar la dependencia que tiene el valor de un proyecto minero de la naturaleza del proceso del precio del cobre, y cómo variaciones en los parámetros que la determinan afectan la valorización de un proyecto minero; y por otra

parte la forma en que la flexibilidad operacional puede agregar valor a un proyecto minero, especialmente en los casos en que los márgenes son menores.

Más allá de los resultados específicos de evaluar una mina de cobre tipo, el informe muestra la aplicabilidad de la metodología a un problema de evaluación de proyectos que incorpora flexibilidad operacional (opciones reales) y un modelo de precios realista que sería difícil de implementar de otra manera.

La metodología permite un ajuste consistente de los flujos de caja al riesgo, valorización de la flexibilidad operacional, posibilidad de extensión a modelos más realistas de un proyecto minero, e identificación de políticas óptimas de operación. Una posible desventaja es la dificultad de selección y estimación de los modelos de precios, pero esta dificultad es inherente a la evaluación de proyectos mineros, independientemente de la metodología que se use.

# Capítulo 1 EVALUACIÓN DE PROYECTOS MINEROS DE COBRE

## Flujos de Caja Descontados y Parámetros de Evaluación

El principal objetivo de ejecutar un proyecto minero es maximizar el valor económico del dueño o de los accionistas. Aunque pueden existir otros objetivos en la evaluación y ejecución de proyectos mineros, el criterio más usual es la maximización del valor económico para accionistas diversificados<sup>5</sup>. Una inversión añade valor en la medida en que su retorno es mayor que las alternativas de inversión, de riesgo comparable, disponibles en el mercado para los accionistas.

La medida de valor económico de un proyecto más frecuentemente usada es el Valor Presente Neto (VPN), que considera todos los gastos de inversión y los flujos operacionales de caja, en tanto el procedimiento más habitual de estimación de dicho valor es el cálculo de los Flujos de Caja Descontados (FCD), en el que los flujos de caja esperados son ajustados por el momento en que ocurren en el tiempo y su nivel de riesgo. El valor de un proyecto equivale a los flujos de caja esperados en el futuro, descontados por una medida del valor de tiempo del dinero y del riesgo del proyecto, que generalmente son la tasa de interés libre de riesgo, y el costo de capital promedio ponderado (CCPP), respectivamente.

Por lo tanto, dos aspectos fundamentales de la evaluación de proyectos mineros son la determinación del valor esperado de los flujos de caja futuros, y la tasa de descuento apropiada. En ambos casos, a pesar de la simplicidad y transparencia de este método de evaluación, se enfrentan dificultades en la evaluación de proyectos de minería del cobre.

En el caso de los valores esperados de los flujos de caja futuros, estos deben considerarse variables aleatorias afectadas por varios factores de riesgo, incluyendo aquellos más técnicos, como el nivel de las reservas (que pueden variar en la medida en que se obtiene más información), o las leyes de mineral, entre otros, y aquellos económicos como los precios de insumos y otros determinantes de los costos de operación, y principalmente, el precio de el o los productos mineros en el mercado. Es común que, en la evaluación de proyectos mineros, el principal factor de riesgo sea el precio del producto, cuyo valor esperado se resume en un precio de largo plazo, esto es, el valor esperado del precio en un horizonte lejano.

El valor esperado del precio del cobre en horizontes lejanos, principal factor de riesgo de un proyecto minero de cobre, debe ser estimado. Como puede observarse en la Figura 1.1, la estimación de este parámetro tiene bastante incertidumbre, la que necesariamente se traducirá en incertidumbre del VPN del proyecto minero. Además, como se refleja en la Figura 1.2, ha variado fuertemente en los últimos años. En términos nominales, entre

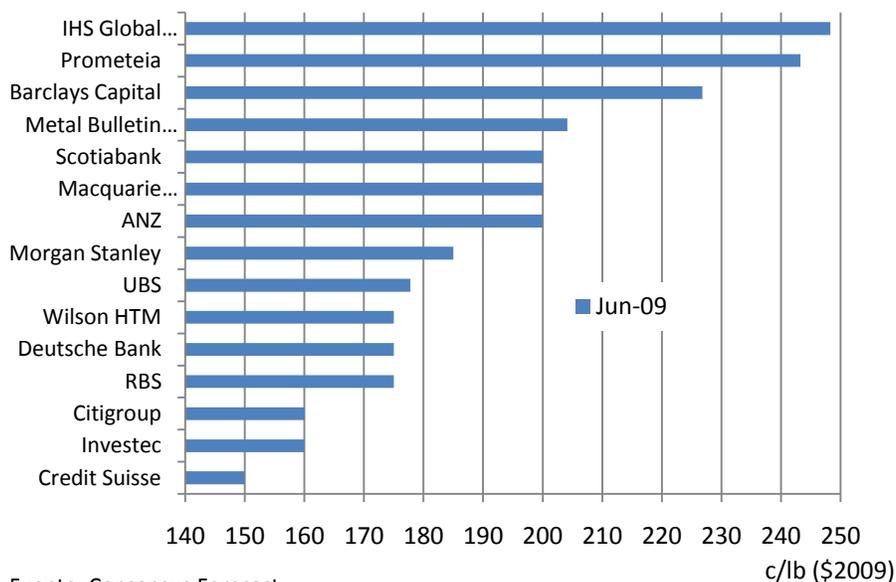
---

<sup>5</sup> El criterio de los accionistas y de los administradores puede divergir, por ejemplo, con éstos últimos poniendo más énfasis en el crecimiento de una compañía. Los accionistas diversificados permiten que los costos alternativos sean los definidos por el mercado accionario en general.

mediados de 2007 y mediados de 2009, la estimación se ajustó en casi un 40%. A la incertidumbre del precio apropiado para evaluar una inversión de largo plazo se añade la incertidumbre en los costos de inversión y operación, y la incertidumbre técnica de la operación minera.

Figura 1.1

### Proyecciones de precio de largo plazo del cobre



Fuente: Consensus Forecast.

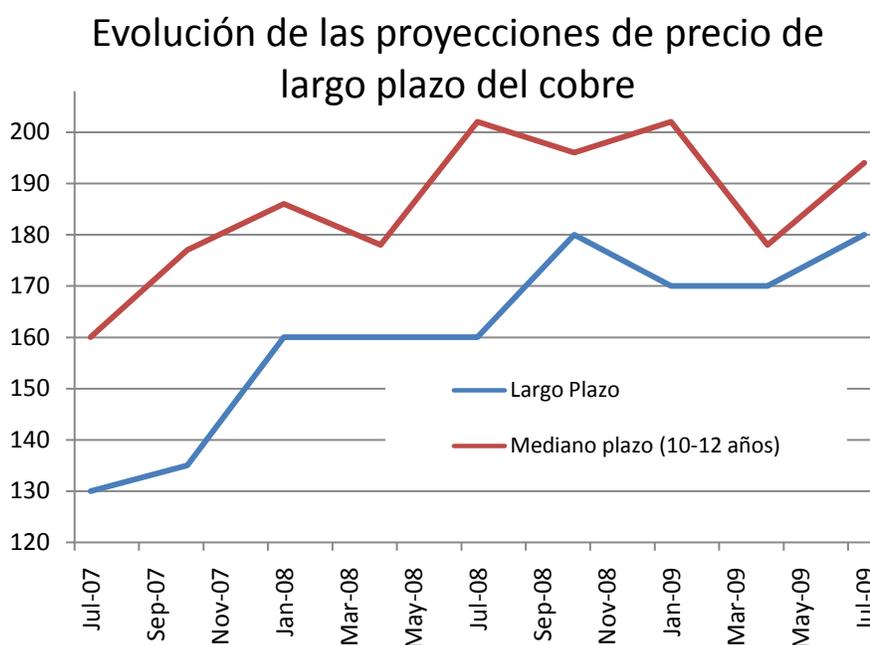
Nota: Proyecciones de precio largo plazo (5 a 10 años) en c/lb reales (ajustados por inflación).

La estimación del precio de largo plazo depende crucialmente de las características dinámicas del precio, y en particular, de la presencia de reversión a la media en la serie de precios. Si esta sigue un proceso estacionario, el precio de largo plazo debiera ser estable, o estable en torno a una tendencia. Si el precio, en cambio, sigue un proceso no estacionario, el precio de largo plazo puede moverse continuamente. En el caso extremo, en un proceso no estacionario sin reversión a la media, el precio de largo plazo no es diferente del precio actual, y en un caso menos extremo, si existe algún grado de reversión a la media, se puede esperar que el precio de largo plazo se mueva, aunque en menor medida que el precio actual, lo que parece ser una descripción adecuada del proceso del precio del cobre, como se verá más adelante. Es importante también tener en consideración que la varianza de un proceso no estacionario crece continuamente con el tiempo, con lo que la incertidumbre es mayor a mayor horizonte de proyección.

Puede parecer extraño que un precio de largo plazo se actualice con frecuencia y a veces significativamente, pero dependiendo de la naturaleza del proceso del precio, esto puede ser correcto y necesario.

El otro componente central del cálculo del VPN de proyectos mineros de cobre a través de los FCD es la tasa de descuento, que incorpora las preferencias temporales y frente al riesgo, no individuales, sino que a nivel de mercado. Lo más común es el uso del costo de capital promedio ponderado (CCPP) para tales efectos, que depende del riesgo sistemático al que está expuesta la compañía. Esto supone implícitamente que el proyecto evaluado es un proyecto “promedio”, en el sentido de que sus características de riesgo son similares a las del conjunto de la compañía. De lo contrario se hacen necesarios ajustes a la tasa de descuento, que pueden depender de los costos del proyecto, de su ubicación geográfica, u otro factor que a juicio de los administradores altere las condiciones de riesgo del proyecto.

Figura 1.2



Fuente: Brook Hunt, The Long Term Outlook for Copper.  
 Nota: Valores de cada año.

En el caso de una compañía no transada en el mercado (el caso de empresas estatales como CODELCO) no es posible recurrir a un historial del valor de mercado de la compañía, y por lo tanto no puede estimarse directamente un valor histórico para el riesgo sistemático, y luego usarlo en la determinación de una tasa de descuento para la evaluación de proyectos. En este caso es necesario un supuesto adicional: que puede usarse el CCPP de una compañía de características similares (por ejemplo, que es de envergadura similar y vende los mismos productos).

En resumen, la tasa de descuento apropiada para un proyecto minero es difícil de determinar y no permite discriminar entre proyectos con perfiles de riesgo diferentes. Menos aún si el perfil de riesgo es cambiante, como ocurre cuando la mina presenta

flexibilidad operacional, y puede hallarse en futuro en diferentes estados de operación. En (Samis, y otros 2006) se argumenta que para la mayor parte de los activos mineros, la técnica de Flujos de Caja Descontado no puede dar cuenta de los efectos de la incertidumbre de los flujos de caja en el valor del activo<sup>6</sup>. En sentido estricto, la tasa de descuento debiera variar por cada uno de los componentes del flujo de caja de un activo, y a través del tiempo, y sólo para efectos de simplificación se usa una tasa de descuento idéntica para todos los componentes, y constante a través del tiempo. Frente a esto es común, en la industria minera, ver (Samis, y otros 2006), la identificación de los diferentes factores de riesgo de un proyecto, y la asignación de un premio por riesgo a cada uno de ellos, los que sumados a la tasa libre de riesgo permiten obtener una tasa de descuento ajustada por riesgo. El problema de esta aproximación es que se debe recurrir a estimaciones cualitativas de riesgo<sup>7</sup>.

Un mismo activo minero puede, adicionalmente, permitir diferentes escenarios de desarrollo, con diferentes niveles de inversión, costos operacionales, producción y vida útil. En este caso, asimismo, el uso de una única tasa de descuento, o un ajuste cualitativo a la tasa de descuento para incorporar las características propias de cada diseño, sufre los inconvenientes señalados.

Si el proyecto evaluado, además, incorpora flexibilidades, entre las cuales las más citadas para el caso de la minería son la postergación de la inversión, alteraciones en los planes mineros, el cierre temporal de la operación minera, su reapertura o su abandono definitivo, la estimación del VPN se vuelve más compleja. Las flexibilidades pueden entenderse como la posibilidad de optar entre diferentes flujos de caja esperados, y por lo tanto, alteraciones en el perfil de riesgo del proyecto. La flexibilidad en un proyecto minero es especialmente relevante, en el sentido de que puede agregar valor frente a un proyecto considerado como inflexible, cuando la rentabilidad del proyecto es menos pronunciada, vale decir, cuando el VPN correctamente estimado es levemente superior o inferior a cero.

## **Valoración a través de opciones reales**

Una alternativa para la evaluación de proyectos mineros que permite lidiar con los problemas señalados (diferente perfil de riesgo de los diferentes proyectos y de los diferentes diseños para un mismo proyecto; consideración de la flexibilidad inherente al proyecto; descuento apropiado al riesgo de los diferentes componentes de los flujos de caja) es la técnica del Análisis de Opciones Reales (AOR).

Una Opción Real es, en analogía a las opciones financieras, el derecho pero no la obligación de tomar una decisión de negocio, que puede corresponder a realizar una inversión de capital (desarrollar un proyecto) o la posibilidad de modificar en el futuro un aspecto de la operación del proyecto (expansión, contracción, abandono, entre otras). En

---

<sup>6</sup> Ver también en (Cortazar 1999) una exposición de las dificultades de la aplicación del VPN a la evaluación de proyectos mineros o de recursos naturales.

<sup>7</sup> Ver también (Slade 2001) para una descripción de la práctica en la industria minera.

este sentido, el AOR apunta principalmente a considerar las flexibilidades inherentes en un proyecto al momento de su evaluación, y determinar el valor que agrega a un proyecto la consideración de esta flexibilidad. En otras palabras, si el proyecto admite algún grado de flexibilidad, el valor total del proyecto será el VPN sin flexibilidad más el valor de las opciones consideradas:

$$V_{proyecto} = VPN + V_{flexibilidad} \quad (1)$$

Como el valor de la flexibilidad es siempre positivo (es un derecho pero no una obligación, y por lo tanto su valor no puede ser menor que cero), el VPN sin flexibilidad tiende a subestimar el valor del proyecto, cuando esta flexibilidad es importante, esto es, cuando la probabilidad de que se ejerza la opción de negocios es significativa. Un proyecto de alta rentabilidad es poco probable que cierre temporalmente, y por lo tanto el valor de la opción de cerrar no contribuye a aumentar el VPN del proyecto, pero en caso inverso, el valor de la flexibilidad puede ser importante.

La igualdad de la ecuación (1) es válida cuando la estimación del VPN del proyecto sin flexibilidad a través de los FCD es correcta, en el sentido de reflejar las características de riesgo peculiares al proyecto. Esto no es necesariamente así, y por ello, la determinación del valor de un proyecto a través del AOR puede permitir una mejor aproximación al valor real de un proyecto, aún en ausencia de flexibilidad. Como se señala en (Samis, y otros 2006) esto se debe a que el AOR permite diferenciar los activos de acuerdo a sus características particulares de riesgo, con independencia de si existe flexibilidad o no.

El Análisis de Opciones Reales intenta resolver el mismo problema económico que el cálculo de los FCD, esto es, la maximización del valor económico de mercado, pero con un procedimiento diferente<sup>8</sup>. El AOR usa un modelo de valoración de los flujos de caja que reconoce el impacto que tienen las decisiones de negocios en su riesgo, y en principio, ajusta esta valoración a mercado. En términos generales puede decirse que en el AOR, el ajuste por riesgo se realiza directamente a los componentes del flujo de caja y la tasa de descuento es la tasa libre de riesgo.

A pesar de las diferencias, la técnica de los FCD puede verse como un caso particular y simplificado del AOR. Podemos escribir el valor presente como (Alesii 2008):

$$VP_0 = \sum_{t=0}^T \frac{E[FC_t]}{(1+E[TD])^t} \quad (2)$$

Vale decir, los flujos de caja esperados para cada periodo son descontados al presente por medio de una tasa de descuento “esperada” constante, de acuerdo a un modelo de valorización de activos como el CAPM<sup>9</sup>. Esto se puede reescribir en forma recursiva como:

$$VP_t = E[FC_t] + \frac{VP_{t+1}}{1+E[TD]} \quad \forall t = T - 1, \dots, 0 \quad (3)$$

<sup>8</sup> Ver por ejemplo (Dixit y Pindyck 1994) para una exposición completa de la teoría.

<sup>9</sup> CAPM “Capital Asset Pricing Model”.

En el caso de las opciones reales la ecuación (3) se generaliza del siguiente modo:

$$VP_t(X_t, m, t) = FC_t(X_t, m, t) + \frac{E^*[VP_{t+1}(X_{t+1}, m, t+1)]}{e^{r_f \Delta t}} \quad (4)$$

Donde  $r_f$  es la tasa libre de riesgo; el valor y los flujos de caja dependen del precio del cobre y otros factores de riesgo representados por  $X_t$ , el modo de operación  $m$ , que define la flexibilidad del proyecto para cambiar de un estado a otro, y el tiempo; y  $E^*[VP]$  corresponde a la esperanza del valor del proyecto en el próximo periodo, ajustada por riesgo, de acuerdo a los factores de riesgo que inciden en los flujos de caja y que componen  $X_t$ . En cada momento del tiempo se puede alterar el modo de operación a un costo determinado, cambiando o alternando los flujos de caja futuros, buscando maximizar el valor.

Un aspecto de la valorización de un proyecto en su sentido más general, que no se aprecia directamente en la ecuación (4), es que al escoger entre modos de operación, la elección debe ser óptima con respecto a la posibilidad de futuros cambios en el modo de operación, y no sólo comparando los retornos de cada opción en un punto del tiempo. Esto implica que cualquier estimación basada en la intuición de la ecuación (4) se resolverá retrocediendo en el tiempo desde un nodo terminal. Esta intuición está tras la implementación que se describe más adelante.

En cuanto al ajuste por riesgo de los factores de riesgo subyacentes (principalmente el precio del cobre), este está basado en argumentos de ausencia de oportunidades de arbitraje. Ver, por ejemplo, anexo 1 en (Urzúa 2004). En el próximo capítulo se presentan algunos modelos de precios disponibles en la literatura y se presentan las versiones ajustadas por riesgo que se usan en el cálculo del valor de proyectos mineros. Cada factor de riesgo es ajustado independientemente.

Al comparar las ecuaciones (3) y (4) puede observarse que el caso de los FDC la estimación de la tasa de descuento es en cierto modo independiente del problema en cuestión, y en particular de la proyección de los flujos de caja. Adicionalmente, la ecuación (3) implica la mantención del mismo modo de operación a lo largo de la vida útil del proyecto. En cambio, en el AOR el ajuste por riesgo es específico al proyecto, afectando directamente los flujos de caja, y se considera la posibilidad de cambiar el estado operacional  $m$  en el desarrollo del proyecto.

## Capítulo 2 EVALUACIÓN DE PROYECTOS MINEROS FLEXIBLES

### Modelo de una mina de cobre

El modelo de mina de cobre usado en esta sección para describir la evaluación de un proyecto por medio del AOR es el de (Brennan y Schwartz 1985), aunque con diferentes modelos para el proceso del precio del cobre, y utilizando la metodología propuesta por (Longstaff y Schwartz 2001) para la valoración de opciones de tipo americano que se describe más adelante.

La mina de cobre posee reservas finitas  $Q_{max}$  que se explotan de acuerdo a un plan de producción fijo. La estructura de costos es conocida y puede ser fija como en (Brennan y Schwartz 1985) o dependiente de las reservas, como en (Gamba 2003). En la evaluación de la mina se incorporan dos tipos de flexibilidad: la posibilidad de cerrar temporalmente la mina y reabrirla, y la posibilidad de abandonarla definitivamente. Cada una de estas opciones tiene costos asociados. La mina está sujeta a un impuesto a las ganancias y posiblemente a un royalty; además puede estar sujeta a un impuesto a la propiedad. En (Brennan y Schwartz 1985) el modelo de precios usado es de movimiento geométrico browniano con un retorno por conveniencia constante y proporcional al precio.

En cada periodo los flujos de caja de la mina en producción son los siguientes:

$$FC_t = q_t(S_t - C_t)\Delta t - \tau \quad (5)$$

Donde  $q_t$  es la producción anual,  $S_t$  es el precio del cobre,  $C_t$  es el costo de producción, y  $\tau$  son los impuestos. Los impuestos pueden tomar la forma general  $\tau = \tau_1 qS + \max[\tau_2 q(S(1 - \tau_1) - C); 0]$ , donde  $\tau_1$  es un impuesto a las ventas y  $\tau_2$  es un impuesto a las utilidades<sup>10</sup>. Cuando la mina está cerrada incurre un costo de mantenimiento  $C_m$ , en tanto el cierre y apertura de la mina tienen un costo de  $C_{ac}$  y  $C_{ca}$ .

En (Brennan y Schwartz 1985) el valor de la mina se deriva en base a argumentos de ausencia de arbitraje (creando un portafolio libre de riesgo compuesto del activo minero y futuros de cobre), lo que permite deducir la ecuación que gobierna el valor de la mina y que se maximiza seleccionando la política óptima de operación. El problema debe resolverse por métodos numéricos. El valor de la mina depende de su estado (abierta, cerrada, abandonada), el tiempo, el nivel de reservas disponibles y el precio del cobre.

Los parámetros usados en (Brennan y Schwartz 1985) se presentan en la Tabla 2-1.

---

<sup>10</sup> En (Brennan y Schwartz 1985) el cálculo se simplifica asumiendo que  $\tau_1 = 0$ , y que existe *arrastre de pérdidas*, de modo que el impuesto es simplemente  $\tau = q(S - C)(1 - \tau_2)$ .

Tabla 2-1

Parámetros de mina de cobre en (Brennan y Schwartz 1985)		
Parámetros		Valores
Reservas	$Q_0$	150 Millones de libras
Producción anual	$q_t$	10 Millones de libras
Costo de producción	$C_t$	0,5 US\$/lb
Costo de apertura	$C_{ca}$	200.000.- US\$
Costo de cierre	$C_{ac}$	200.000.- US\$
Costo de mantención	$C_m$	500.000.- US\$
Impuesto a las utilidades	$\tau_1$	50%
Royalty	$\tau_2$	0%
Impuesto a la propiedad	$\lambda$	2%

### Método Montecarlo de Mínimos Cuadrados y su aplicación a una mina de cobre.

Las opciones de la mina pueden considerarse como una secuencia de opciones de tipo americano, que implica el derecho, pero no la obligación, de obtener el flujo de caja asociado a su ejercicio. En el caso de la mina, el ejercicio de la opción de cerrar temporalmente implica abandonar los flujos de caja asociados con la mina abierta y reemplazarlos con los flujos de caja de una mina cerrada (pero que puede ser reabierta en cualquier periodo posterior). Este ejercicio no tiene un plazo de vencimiento definido, sino que puede ejercerse en cualquier momento. La opción de abandono, en cambio, es definitiva, y se asume que no tiene costo.

La valoración de opciones de tipo americano es generalmente un ejercicio complejo, en especial cuando existen múltiples factores de riesgo y las técnicas numéricas aplicables se vuelven poco prácticas. En (Longstaff y Schwartz 2001) se propone un método de valoración basado en simulaciones de Montecarlo ("Least Squares Montecarlo" o LSM). La estrategia óptima en cada periodo depende del valor esperado del flujo de caja que se obtiene al ejercer la opción. La aproximación que se propone en (Longstaff y Schwartz 2001) consiste en estimar este valor esperado en base a una regresión de mínimos cuadrado. Como este valor esperado depende de decisiones óptimas futuras, el algoritmo debe retroceder en el tiempo desde un tiempo terminal  $T$  en que el valor de la opción es conocido, y realizar un número grande de simulaciones de el o los proceso subyacente.

La intuición del algoritmo, tal como se explica en (Longstaff y Schwartz 2001), consiste en que el poseedor de una opción americana, en cada momento, compara las ganancias que obtiene del ejercicio de la opción, con las ganancias esperadas de mantener vigente la opción. Las ganancias esperadas dependen del estado actual de el o los factores subyacentes y se estiman a partir de una regresión de múltiples realizaciones de dichos estados, con múltiples realizaciones de los valores de continuación (que ya se obtuvieron, pues el algoritmo retrocede en el tiempo).

La aplicación del método LSM a la evaluación de una mina como la descrita en (Brennan y Schwartz 1985) se presenta en (Cortazar, Gravet y Urzua 2006) y en (Gamba 2003), entre otros. En lo que sigue usamos la primera de estas aproximaciones.

En el tiempo terminal  $T$ , que puede asumirse como el término de un periodo de concesión, el valor de la mina abierta y cerrada es cero, con independencia de las reservas y el nivel de precios (y de otros factores de riesgo, como el retorno por conveniencia, si este es estocástico). En el tiempo  $T-1$ , el valor de la mina abierta es simplemente el máximo entre los flujos de caja derivados de continuar la producción al precio actual y el abandono de la mina. Cerrar temporalmente la mina en el último periodo no tiene sentido pues se paga el costo de cierre y mantención con los mismos resultados de abandonarla, que se asume que no tiene costos asociados. En el caso de la mina cerrada, su valor es el máximo entre los flujos de caja que se obtienen al reabrirla, pagando los costos de reapertura, y cero, que es lo que se obtiene al abandonarla.

$$\text{Valor Mina abierta} = V_{T-1} = \max(FC_{T-1}, 0)$$

$$\text{Valor Mina cerrada} = W_{T-1} = \max(FC_{T-1} - C_{ca}, 0) \quad (6)$$

Donde  $FC_t$  corresponden a los flujos de caja que se obtienen en el periodo y que dependen del precio en ese momento; y  $C_{ca}$  es el costo de reapertura de la mina cerrada temporalmente.

En el periodo anterior,  $T-2$ , el valor esperado de una mina abierta dependerá de la opción que se tome (mantener abierta, cerrar temporalmente, o abandonar). Este valor es incierto en el momento  $T-2$ , y corresponde a la esperanza condicional de valor presente de los flujos futuros que se obtienen de tomar una u otra opción, y depende de las reservas disponibles, del precio actual (y otros factores de riesgo), y del tiempo.

$$E_{T-2}[V_{T-2}(Q)] = \max \begin{cases} FC_{T-2} + E_{T-2}[e^{-(r+\lambda)}V_{T-1}(Q - q\Delta t)] \\ -C_m - C_{ac} + E_{T-2}[e^{-(r+\lambda)}W_{T-1}(Q)] \\ 0 \end{cases} \quad (7)$$

La primera línea corresponde a los flujos de caja más el valor de continuación esperado en caso de mantener la mina abierta, la segunda línea al caso de cerrarla temporalmente, y la tercera línea al caso de abandonarla.  $C_m$  es el costo de mantener una mina cerrada,  $C_{ac}$  es el costo de cierre,  $E_{T-2}[V_{T-1}]$  es el valor esperado de continuación si la mina permanece abierta y que por lo tanto tendrá menos reservas, y  $E_{T-2}[W_{T-1}]$  es el valor esperado de continuación si la mina se cierra, pero mantiene sus reservas. Ambos valores esperados se descuentan al presente por la tasa libre de riesgo, ya que los procesos subyacentes incorporan el ajuste por riesgo y consideran un impuesto a la propiedad  $\lambda$ .

En el caso de una mina cerrada, su valor esperado en  $T-2$ , es el siguiente:

$$E_{T-2}[W_{T-2}(Q)] = \max \begin{cases} FC_{T-2} - C_{ca} + E_{T-2}[e^{-(r+\lambda)}V_{T-1}(Q - q\Delta t)] \\ -C_m + E_{T-2}[e^{-(r+\lambda)}W_{T-1}(Q)] \\ 0 \end{cases} \quad (8)$$

En donde  $C_{ca}$  es el costo de reabrir la mina. El valor esperado de continuación si la mina se abre corresponde al de una mina abierta con menores reservas, y en el caso de una mina que se mantiene cerrada, con las mismas reservas.

La estimación de los valores esperados de continuación en las ecuaciones (7) y (8) se hace a partir de los valores efectivos obtenidos, que dependen de la realización de precios. El valor esperado de una mina abierta en el próximo periodo es la siguiente:

$$\hat{E}_{T-n} [e^{-(r+\lambda)}V_{T-n+1}] = \hat{a}_{T-n} * X_{T-n} \quad (9)$$

En donde  $X_t$  es una matriz de funciones de realizaciones de los factores de riesgo en el tiempo  $t$  y  $\hat{a}_t$  es el vector de coeficientes que se obtiene de una regresión de los valores efectivos de realizaciones de  $V$  en el próximo periodo (apropiadamente descontada) con  $X_t$ . Para las funciones ocupadas en la regresión se han propuesto varias alternativas, siendo la más sencilla de implementar la de polinomios simples de los factores de riesgo, que se ocupa a continuación. En el caso de existir más de un factor de riesgo, se incluyen los productos de los diferentes factores y sus potencias en la regresión. La regresión debe hacerse para cada nivel de inventarios posible, pues el valor de la mina es condicional a este parámetro<sup>11</sup>. En el periodo  $T-1$ , los valores efectivos corresponden a los de la ecuación (6). Para los periodos anteriores estos se obtienen a partir de la opción elegida en las ecuaciones (7) y (8).

A continuación pueden obtenerse los valores realizados o efectivos de la mina en el periodo, que dependerán de la política de operación que se haya elegido. Para el caso de una mina abierta:

$$V_{T-2}(Q) = \begin{cases} FC_{T-2} - C_{ca} + e^{-(r+\lambda)\Delta t}V_{T-1}(Q - q\Delta t) \\ -C_m + e^{-(r+\lambda)\Delta t}W_{T-1}(Q) \\ 0 \end{cases} \quad (10)$$

La primera línea corresponde al valor de la mina en el tiempo  $T-2$  cuando se ha elegido mantenerla abierta en virtud de los valores esperados en la ecuación (7). Corresponde a la suma de los flujos de caja obtenidos, más el valor de la mina en el periodo siguiente, descontado por la tasa libre de riesgo, y considerando el pago de un impuesto a la propiedad igual a  $\lambda$ . La segunda línea corresponde al valor cuando se elige cerrar la mina temporalmente y la tercera cuando se elige abandonarla sin costo.

---

<sup>11</sup> Con reservas  $Q$  y producción anual  $q$ , existen  $R = Q_{max} / q\Delta t$  niveles de reservas posibles en cada periodo.

En el caso de una mina que está cerrada, los valores efectivos corresponden a:

$$W_{T-2}(Q) = \begin{cases} FC_{T-2} - C_{ca} + e^{-(r+\lambda)\Delta t}V_{T-1}(Q - q\Delta t) \\ -C_m - C_{ac} + e^{-(r+\lambda)\Delta t}W_{T-1}(Q) \\ 0 \end{cases} \quad (11)$$

La primera línea corresponde al valor de una mina que se abre, en tanto la segunda línea corresponde al valor de una mina que se mantiene cerrada en el periodo, y la tercera al de una mina que se abandona.

De este modo se retrocede en el tiempo hasta la actualidad, con lo cual se obtiene el valor de una mina abierta o cerrada en el presente.

En el tiempo inicial no es posible realizar la regresión de la ecuación (9), pues existe un único valor para los factores de riesgo (el valor inicial de la simulación), por lo que en (Cortazar, Gravet y Urzua 2006) se sugiere usar simplemente el promedio de los valores de la mina en el periodo siguiente, apropiadamente descontados, para estimar el valor esperado.

## Capítulo 3 MODELOS DE PRECIOS Y EVALUACIÓN DE PROYECTOS

La valoración de proyectos mineros de cobre requiere de la correcta modelación de las características dinámicas del precio del cobre y de los precios futuros transados en el mercado. Esto es especialmente importante porque en la mayoría de los casos el horizonte en que se tranzan los contratos de futuros es muy corto en relación a los horizontes de desarrollo y producción de los proyectos mineros.

En este capítulo se presentan tres modelos del comportamiento de precios de recursos naturales y de la determinación de los precios de futuros. La aplicabilidad de cada uno de ellos al caso del cobre es una cuestión empírica. Los modelos corresponden a un movimiento geométrico browniano (usado en (Brennan y Schwartz 1985) para la valorización de una mina de cobre con flexibilidad) y modelos con reversión a la media presentados en (Schwartz 1997), en particular los modelo N°1 y N°2 de dicho documento.

En cada caso se presenta el resultado de valorar la mina de cobre descrita en el capítulo anterior, así como sensibilidades a los principales parámetros del proceso del precio, y de la mina<sup>12</sup>. Además, para efectos de comparación, se presenta el resultado de evaluar la mina sin considerar flexibilidades, usando el valor esperado del precio de los futuros de cobre.

### Movimiento Geométrico Browniano (MGB)

Este modelo asume que el precio del cobre sigue un proceso geométrico browniano:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t \quad (12)$$

Donde  $\mu$  es el retorno total del precio,  $\sigma$  es la volatilidad de los retornos del precio, y  $dw_t$  es el incremento de un proceso de Wiener, esto es, un movimiento browniano. Supuestos adicionales son necesarios para determinar el valor de un contrato de futuros de este proceso. En particular, como se señala en (Brennan y Schwartz 1985) es necesario suponer una tasa de interés libre de riesgo constante y un retorno por conveniencia<sup>13</sup> proporcional al precio del cobre  $S$ .

Es posible demostrar que el precio futuro del cobre corresponde a:

$$F_t(S_t, T) = S_t e^{(r-\delta)T} \quad (13)$$

---

<sup>12</sup> Las simulaciones se programaron en MATLAB.

<sup>13</sup> El retorno por conveniencia corresponde al flujo de beneficios que obtiene el poseedor de cobre físico que no obtiene el poseedor de un contrato de futuros de cobre. Puede considerarse como el valor que se obtiene de la posibilidad de beneficiarse de la escasez temporal de metal y es una razón para mantener inventarios de cobre aún en presencia de costos de almacenaje. Si se considera al cobre como un activo, puede pensarse en el retorno por conveniencia como un dividendo obtenido por la posesión de este activo.

Donde  $r$  es la tasa libre de riesgo y  $\delta$  es el retorno por conveniencia neto de los costos de almacenamiento.

Con los mismos supuestos en (Urzúa 2004) se muestra cómo puede obtenerse el proceso ajustado por riesgo a través de la elaboración de un portafolio de futuros de cobre y cobre físico:

$$dS_t^* = (r - \delta)S_t^*dt + \sigma S_t^*dw^* \quad (14)$$

En este caso el cobre físico es considerado un activo que se transa en el mercado y que puede formar parte de un portafolio de inversión. Cabe notar que, en este caso, la dinámica del proceso ajustado por riesgo es independiente del proceso original. Sin importar cuál sea la tendencia original del precio  $\mu$ , el proceso ajustado por riesgo es el de la ecuación (14), en tanto la volatilidad del proceso se conserva tras el ajuste por riesgo.

Para los efectos de la evaluación de proyectos mediante simulación se requiere de la solución de la ecuación (14). Si se define  $x_t = \log(S_t)$  la solución es la siguiente:

$$x_{\Delta t} = x_0 + \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(\Delta t) + \sigma\sqrt{\Delta t}W_t \quad (15)$$

Con  $W_t \sim i. i. d. \mathcal{N}(0,1)$ . En este modelo de precios el proceso ajustado por riesgo tiene una tendencia definida por la tasa de interés y el retorno por conveniencia y, como se ha señalado, es independiente de la tasa de crecimiento del proceso original. La volatilidad de ambos procesos es la misma. Es un proceso no-estacionario sin reversión a la media, y por lo tanto el valor esperado del precio del cobre corresponde simplemente el precio actual ajustado por la tendencia.

Varias razones hacen pensar que este modelo no describe bien el mercado del cobre. En primer lugar, se esperaría que en un escenario de altos precios la oferta aumentara con la entrada de productores de mayor costo, presionando a la baja los precios; y al contrario, en un escenario de precios bajos, los productores de mayores costos podrían verse forzados a salir del mercado, presionando al alza al precio. Esto induciría reversión a la media en los precios del cobre. Por otra parte, este modelo implica que la volatilidad de los precios futuros es la misma que la volatilidad de los precios spot, en tanto empíricamente se observa que la volatilidad disminuye con el horizonte de los futuros (el llamado efecto "Samuelson"). Finalmente, como se aprecia en la ecuación (13), este modelo sólo permite un mercado en contango (precios futuros superiores al precio spot, cuando el retorno por conveniencia es menor que la tasa de interés), en tanto empíricamente el mercado del cobre se encuentra alternativamente en backwardation (precios futuros inferiores al precio spot) y contango. En la Figura 3.1 se presenta un ejemplo de simulación del proceso ajustado por riesgo.

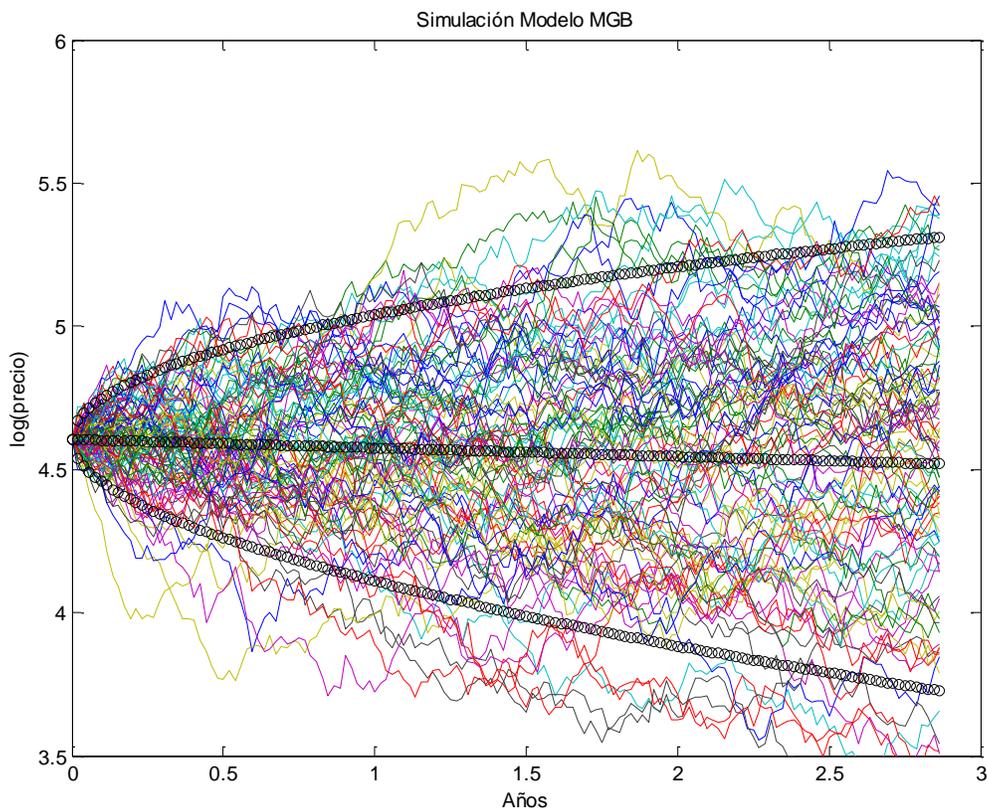
En (Brennan y Schwartz 1985) se usa este modelo para la evaluación de una mina de cobre con flexibilidad, con los parámetros de precio presentados en la Tabla 3-1, que servirán de

base para los cálculos de valorización de proyectos mineros, con las alteraciones que se indiquen en el texto.

Tabla 3-1

Parámetros del Modelo MGB en (Brennan y Schwartz 1985)		
Parámetro		Valores
Tasa de interés	$r$	0.02
Volatilidad del precio	$\sigma^2$	0.08
Retorno por conveniencia	$\delta$	0.01

Figura 3.1



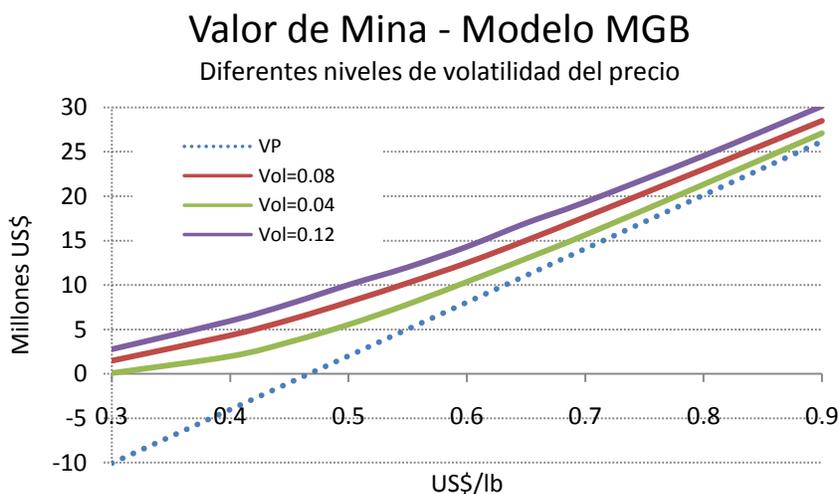
El valor de la mina sin flexibilidad puede obtenerse a partir de los flujos de caja que se originan si la trayectoria del precio sigue su valor esperado, y la mina opera continuamente, sin cierre temporal ni abandono, hasta agotar los recursos. En este caso, el valor de la mina es independiente de la volatilidad del precio. En contraste, en una mina con flexibilidad, la volatilidad del precio es un determinante importante del valor de la mina, pues la opción de cerrar temporalmente permite acotar flujos de caja negativos, cambiando la distribución de los flujos de caja descontados al presente. Esto implica que

una mina sin flexibilidad, que tendría un valor negativo en un ambiente de precios deprimidos (o de costos de producción elevados), tiene un valor positivo en presencia de flexibilidad, pues puede mantenerse cerrada en espera de mejores condiciones de mercado, en tanto la probabilidad de que el proceso de difusión del precio vuelva a hacer la mina abierta rentable, dependerá de la volatilidad del precio. En otras palabras, el valor de la flexibilidad es mayor mientras más grande es la volatilidad del precio.

Por otra parte, la flexibilidad es más importante cuando la probabilidad de que se ejerza la opción de cierre temporal o abandono es más significativa, lo que implica que a mayor margen (mayor diferencia entre los costos de operación y el precio), el valor de la flexibilidad será menor, y será máximo cuando el valor de la mina sin flexibilidad es cercano a cero.

En la Figura 3.2 puede apreciarse la dependencia del valor de la mina del precio actual, para diferentes niveles de volatilidad del precio. Al comparar los resultados obtenidos con los presentados por (Brennan y Schwartz 1985) y (Gravet 2003), que presentan además resultados obtenidos mediante el método de diferencias finitas, se observan diferencias en general menores al 1%, que son esperables en métodos de simulación.

Figura 3.2

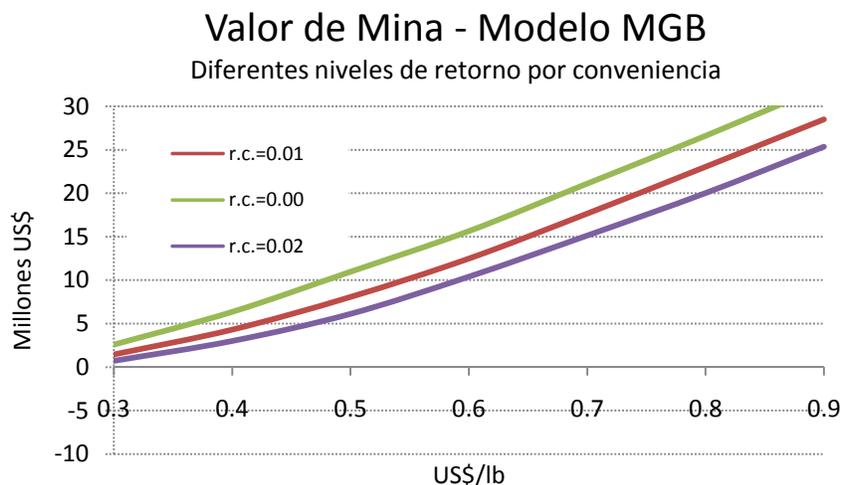


Datos de la simulación: 100.000 trayectorias y polinomio de grado 9 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-1, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años.

A continuación se presentan los resultados de valorar la mina descrita por los parámetros de la Tabla 2-1, para diferentes niveles de retorno por conveniencia (Figura 3.3) y de tasa de interés (Figura 3.4). El retorno por conveniencia (el flujo de servicios que recibe el dueño de cobre físico y no el poseedor de un contrato de futuros de cobre) afecta la trayectoria del precio ajustado por riesgo, de modo que el valor de la mina se relaciona inversamente con el nivel de retorno por conveniencia, y el efecto es más notorio a precios más altos. En el caso de la tasa de interés real, esta también incide en la

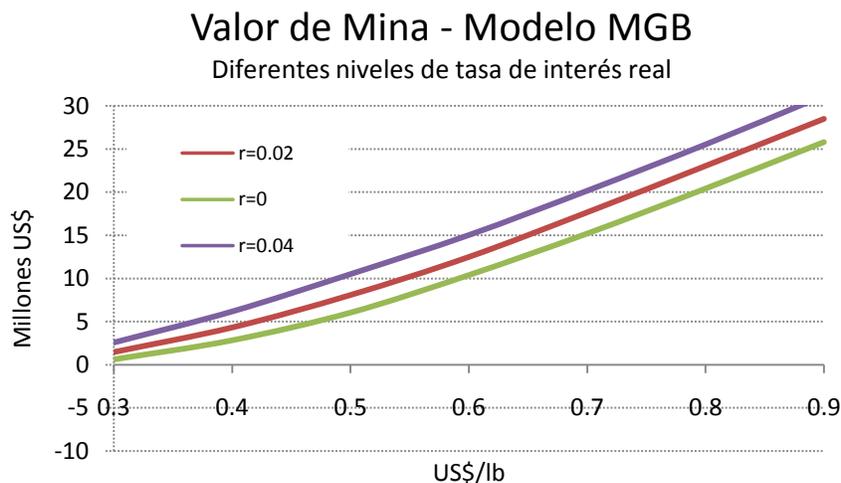
trayectoria del precio ajustado por riesgo, tal como se aprecia en la ecuación (14), pero además determina el descuento por el valor de tiempo del dinero. A mayores tasas de interés el valor de la mina tiende a ser mayor, en contraste con lo que ocurre con la evaluación realizada en un marco de certidumbre, en que un aumento de la tasa de interés, sólo implica mayor descuento de los flujos al presente, y por lo tanto un menor valor del proyecto en el presente.

Figura 3.3



Datos de la simulación: 100.000 trayectorias y polinomio de grado 9 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-1, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años.

Figura 3.4



Datos de la simulación: 100.000 trayectorias y polinomio de grado 9 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-1, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años.

## Modelo Reversión a la Media un Factor (RM1)

Este modelo incorpora reversión a la media en el proceso de precios del cobre. Para ello el logaritmo del precio del cobre  $x_t = \log(S_t)$  se describe como un proceso de Ornstein-Uhlenbeck (Schwartz 1997):

$$\begin{aligned}dS_t &= \kappa(\mu - \ln(S_t))S_t dt + \sigma S_t dw_t \\dx_t &= \kappa(\alpha - x_t)dt + \sigma dw_t\end{aligned}\quad (16)$$

Con  $\kappa$  reflejando la velocidad de ajuste a la tendencia de largo plazo  $\alpha$ , que corresponde a  $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$ . Para efectos de la valoración de activos el proceso debe ajustarse por riesgo, para lo cual el proceso que se ajusta por el precio de mercado del riesgo, reemplazando  $\alpha$  por  $\alpha^* = \alpha - \lambda$ . El precio de mercado del riesgo se considera constante y debe estimarse.

Para efectos de simulación se usa la siguiente aproximación del proceso del logaritmo del precio de la ecuación (16):

$$x_{\Delta t} = x_0 e^{-\kappa \Delta t} + \alpha^* (1 - e^{-\kappa \Delta t}) + v_t W_t \quad (17)$$

Donde  $W_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0,1)$ , con  $v_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa \Delta t})$ . En la Figura 3.5 se muestran trayectorias de la simulación de este proceso.

En este modelo el precio de los futuros de cobre, que corresponde al valor esperado del precio ajustado por riesgo en un horizonte  $T$ , es el siguiente:

$$F_t(S_t, T) = \exp \left( e^{-\kappa T} \log(S_t) + (1 - e^{-\kappa T}) \alpha^* + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa T}) \right) \quad (18)$$

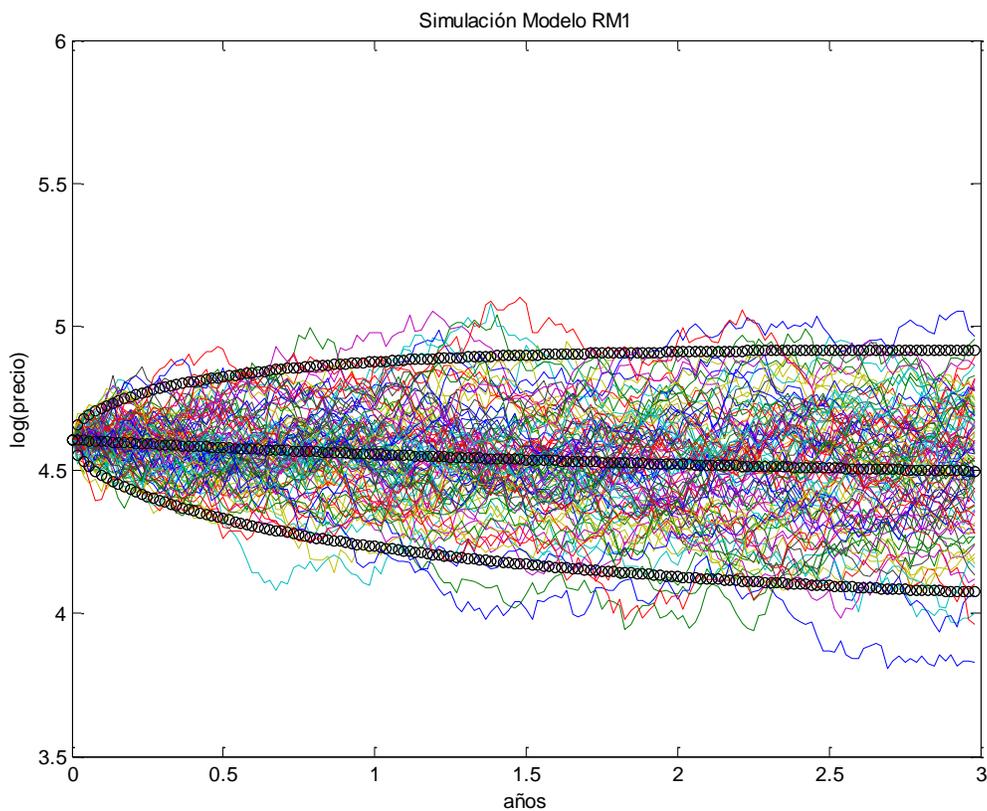
De la ecuación se desprende que el precio futuro puede ser menor o mayor que el precio spot, lo que es consistente con la realidad del mercado. Además, la varianza del proceso del precio no aumenta indefinidamente sino que converge con el horizonte hacia  $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$ . La volatilidad de los futuros por su parte converge a cero con cuando el horizonte tiende a infinito (Schwartz 1997). Esto es porque el precio futuro en un horizonte de muy largo plazo, corresponde simplemente al punto de equilibrio, que es constante.

Los parámetros usados en las simulaciones corresponden a aquellos en (Schwartz y Smith 2000), salvo ajustes que se indiquen más adelante, y se presentan en la Tabla 3-2.

Tabla 3-2

Parámetros del Modelo RM1 en (Schwartz 1997)		
Parámetros		Valores
Tendencia precio	$\mu$	4.854
Velocidad de reversión	$\kappa$	0.369
Volatilidad del precio	$\sigma$	0.233
Premio por riesgo	$\lambda$	0.339
Tendencia log precio	$\alpha$	$\mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$
Tendencia ajustada	$\alpha^*$	$\alpha - \lambda$

Figura 3.5



El valor de la mina representada por los parámetros de la Tabla 2-1 se presentan en la Figura 3.6 para diferentes niveles de volatilidad del precio del cobre. Puede observarse que el valor de la mina no es demasiado sensible a diferentes niveles de volatilidad, aunque por otro lado, la diferencia entre el valor de la mina sin flexibilidad (evaluada usando el valor esperado del precio ajustado por riesgo) y el valor de la mina con flexibilidad es mayor a mayor volatilidad del precio. El valor de la mina sin flexibilidad y

evaluada usando valores esperados cambia con diferentes niveles de volatilidad, porque el precio de largo plazo (ajustado por riesgo) depende de este parámetro, como se desprende de la ecuación (18). En definitiva, el efecto de la volatilidad sobre el valor de una mina con flexibilidad se puede descomponer en dos efectos: el primero que se desprende de cambios en el nivel de equilibrio de largo plazo (y que implica que a mayor volatilidad es menor este nivel), y el segundo que se desprende de la posibilidad de cerrar temporalmente la mina, que adquiere mayor valor en la medida en que aumenta la volatilidad. Este segundo efecto, cuando el precio inicial es elevado, es hasta cierto punto independiente del precio inicial, puesto que toda trayectoria de precio tiende a revertir rápidamente a la media, y las ganancias por flexibilidad se obtienen cuando el precio está bajo, lo que ocurrirá con mayor probabilidad cuando la volatilidad es alta.

En la Figura 3.7 se presentan los resultados para diferentes niveles de reversión a la media. Puede observarse que cuando la reversión a la media es lenta, los resultados se asemejan más a los obtenidos en el modelo MGB, con mayores ganancias de la flexibilidad, especialmente para precios bajos. El valor de la mina sin flexibilidad evaluado al precio esperado ajustado por riesgo también varía significativamente con cambios en la reversión a la media del precio, no sólo por el efecto de este parámetro en el precio de largo plazo, sino que sobre todo porque los precios tenderán a mantenerse por más tiempo en torno al valor inicial, tardando más tiempo en acercarse al valor de largo plazo.

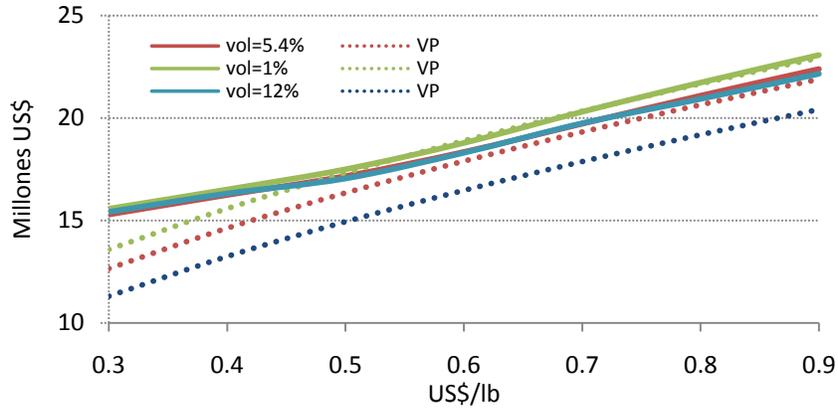
En la Figura 3.8 puede observarse el efecto sobre el valor de la mina con diferentes niveles de precio de largo plazo (del proceso real del precio). Puede observarse que el valor de la flexibilidad es menos pronunciado (para precios iniciales bajos) cuando el precio de largo plazo es menor. Esto se debe a que cuando existe significativa reversión a la media, las principales ganancias se obtienen cuando puede esperarse una recuperación del precio en el futuro con cierto grado de probabilidad, el cual es menor si el precio de largo plazo es más bajo.

Finalmente, en la Figura 3.9 se muestran el efecto sobre el valor de la mina con diferentes niveles de premio por riesgo. Puede observarse que el efecto no es diferente de cambios en el nivel de precio de largo plazo, lo cual es evidente en la ecuación (18).

Figura 3.6

### Valor de Mina - Modelo RM1

Diferentes niveles de volatilidad del precio

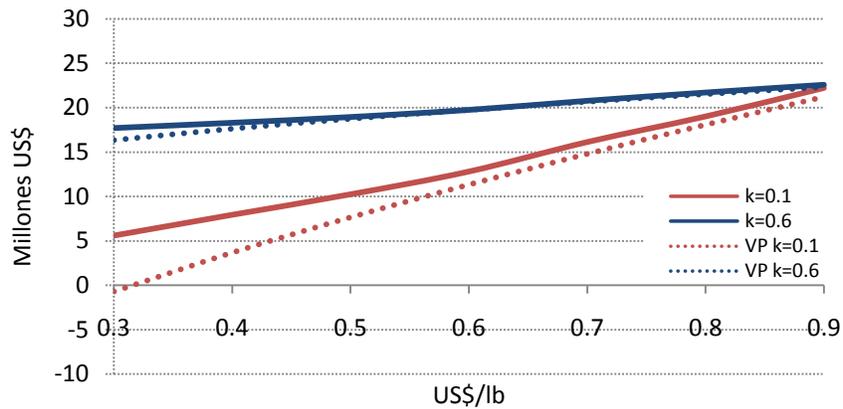


Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 9 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-2, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años.

Figura 3.7

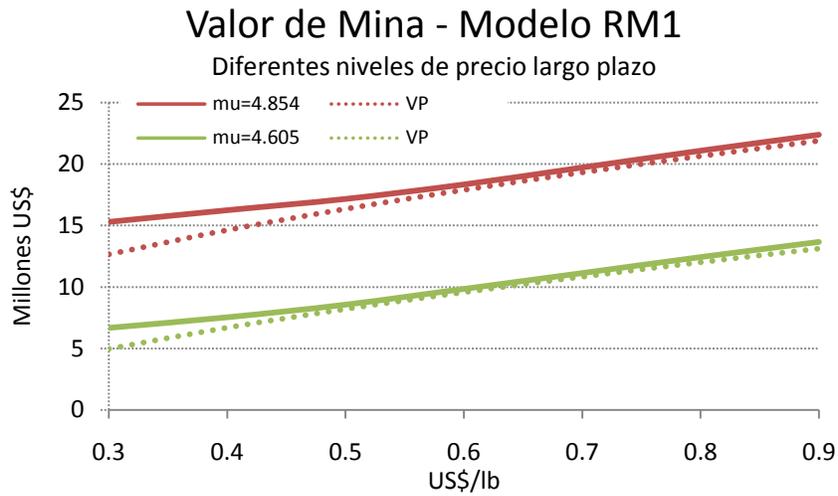
### Valor de Mina - Modelo RM1

Diferentes niveles de reversión a la media



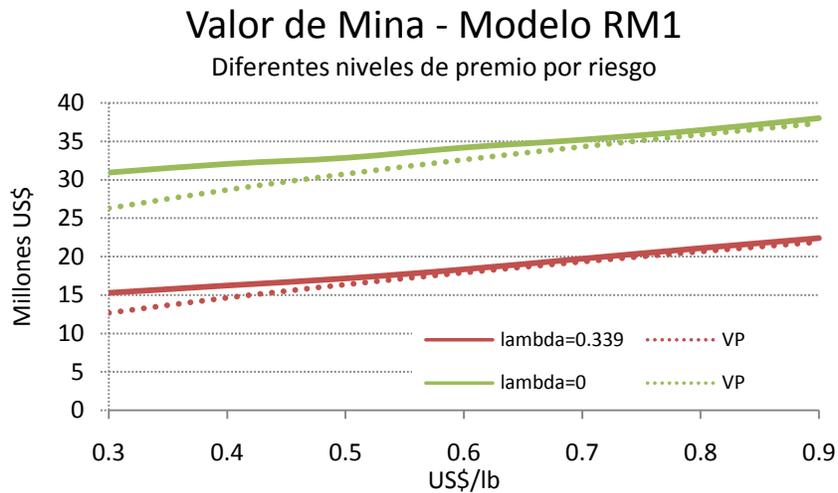
Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 9 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-2, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años.

Figura 3.8



Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 9 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-2, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años.

Figura 3.9



Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 9 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-2, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años.

## Modelo de Reversión a la Media de dos Factores (RM2)

El siguiente modelo (Gibson y Schwartz 1990) permite una mejor aproximación a la estructura de volatilidad de los futuros. En este modelo el retorno por conveniencia en la ecuación (14) no es constante, sino que sigue un proceso aleatorio con reversión a la media, lo que induce reversión en el precio hacia un precio de equilibrio, que sin embargo no es constante. Este modelo corresponde al modelo N°2 en (Schwartz 1997) y es equivalente al modelo presentado en (Schwartz y Smith 2000). En este caso el ajuste por riesgo del precio es equivalente al del modelo de MGB, y en el caso del retorno por conveniencia, se asume que este factor posee un precio por riesgo de mercado. Los procesos ajustados por riesgo son los siguientes:

$$\begin{aligned} dS_t^* &= (r - \delta)S_t^* dt + \sigma_1 dw_1 \\ d\delta_t &= [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_2 dw_2 \\ dw_1 dw_2 &= \rho dt \end{aligned} \quad (19)$$

Donde  $\lambda$  es el premio por riesgo asociado al retorno por conveniencia,  $\alpha$  es el nivel de largo plazo de este factor, y  $\rho$  es la correlación de las innovaciones de los dos factores.

Para efectos de simulación se usa la siguiente discretización para el retorno por conveniencia:

$$\delta_{\Delta t} = (1 - e^{-\kappa\Delta t}) \left( \alpha - \frac{\lambda}{\kappa} \right) + e^{-\kappa\Delta t} \delta_0 + v_t dw_t^1 \quad (20)$$

Con  $dw_t^1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ . Para la simulación del precio se usa la siguiente discretización (Urzúa 2004):

$$x_{\Delta t} = x_0 - \frac{\delta_t(1 - e^{-\kappa\Delta t})}{\kappa} + \left( r - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) \Delta t + \frac{(1 - e^{-\kappa\Delta t} - \kappa\Delta t)(\kappa\alpha - \lambda)}{\kappa^2} + s_t dw_t^2 \quad (21)$$

Con  $dw_t^2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ . Las varianzas y covarianzas usadas en la simulación corresponden a (Urzúa 2004):

$$var(x_{\Delta t}) = \left( \sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\kappa} \right) \Delta t + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa\Delta t}) + \frac{2\sigma_2}{\kappa^2} \left( \sigma_1\rho - \frac{\sigma_2}{\kappa} \right) (1 - e^{-\kappa\Delta t}) \quad (22)$$

$$var(\delta_{\Delta t}) = \frac{\sigma_2^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa\Delta t}) \quad (23)$$

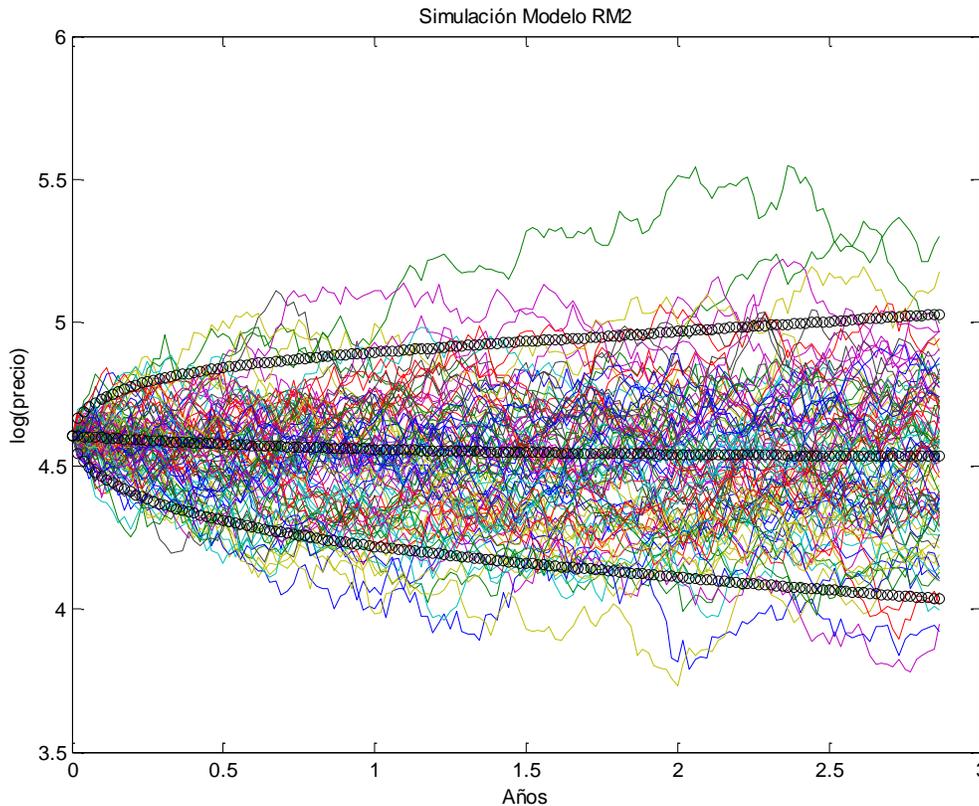
$$cov(x_{\Delta t}, \delta_{\Delta t}) = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} (2e^{-\kappa\Delta t} - e^{-2\kappa\Delta t} - 1) \quad (24)$$

Los valores usados en la simulación corresponden a aquellos en (Schwartz 1997), salvo cambios que se indiquen en el texto, y se presentan en la Tabla 3-3.

Tabla 3-3

Parámetros del Modelo RM2 en (Schwartz 1997)		
Parámetros		Valores
Tendencia del precio	$\mu$	0.236
Velocidad de reversión	$\kappa$	1.156
Retorno por conveniencia de largo plazo	$\alpha$	0.248
Volatilidad precio	$\sigma_1$	0.274
Volatilidad retorno por conveniencia	$\sigma_2$	0.28
Correlación	$\rho$	0.818
Premio por riesgo retorno por conveniencia	$\lambda$	0.256
Tasa de interés	r	0.06

Figura 3.10



En (Schwartz y Smith 2000) se presenta un modelo de precio que tiene una interpretación más intuitiva que el de la ecuación (19), ya que prescinde del concepto de retorno por conveniencia, que puede parecer poco intuitivo, pero que es enteramente equivalente. En dicho modelo el logaritmo del precio del cobre se descompone en dos factores aditivos: un precio de largo plazo que sigue un movimiento geométrico browniano, y un precio de

corto plazo con reversión a la media. La intuición es que los movimientos de largo plazo están dominados por cambios impredecibles y continuos, como descubrimientos de nuevas reservas, cambios tecnológicos, que alteran el punto de equilibrio del mercado; en tanto los movimientos de corto plazo están determinados por la entrada y la salida de empresas cuando el precio se aleja de su punto de equilibrio, lo que genera reversión a la media.

Cabe mencionar también que en (Schwartz 1998) se presenta un modelo de un factor que retiene las características del modelo de la ecuación (19) en horizontes suficientemente alejados del presente (más de tres años), lo que permitiría resolver problemas de opciones reales de manera simplificada cuando esta limitación es menos importante.

En este caso la volatilidad de los futuros no converge a cero con el aumento del horizonte como en el modelo RM1, puesto que el punto de equilibrio no es estático. En las referencias presentadas pueden encontrarse formulaciones exactas de este comportamiento.

Los resultados de valorar la mina representada por los parámetros de la Tabla 2-1 cuando el precio se comporta según el modelo descrito en la ecuación (19) se presentan a continuación.

En la Figura 3.11 se muestra la evaluación para diferentes niveles de volatilidad del precio del cobre. Puede apreciarse que, a pesar de que el modelo incorpora reversión a la media, los resultados se asemejan más al modelo MGB que al modelo RM1. Esto es comprensible si se considera la duración de la mina, de 15 años si se explota continuamente, puesto que en un horizonte más largo tenderá a ser relevante el comportamiento de largo plazo de la serie, y comparativamente menos importante (aunque, como se verá más adelante, de todas formas significativo) el comportamiento “cíclico”.

Una volatilidad baja del precio del cobre tiene el efecto, en primer lugar, de aumentar la tendencia del precio del cobre en largo plazo, lo que explica que la valoración de la mina sea mayor, y viceversa. Para los parámetros presentados, por ejemplo, la trayectoria esperada del precio es creciente cuando la volatilidad es igual a 1% y decreciente cuando la volatilidad del precio es de 12%. Sin embargo, el valor de la flexibilidad, esto es, la diferencia entre el valor de la mina con y sin flexibilidad, aumenta, tanto en términos absolutos como porcentuales, cuando aumenta la volatilidad del precio del cobre, como cabe esperar, puesto que en un escenario de mayor volatilidad la probabilidad de ejercer las opciones aumenta. El resultado de estos dos efectos contrapuestos genera una respuesta compleja frente a diferentes niveles de volatilidad, como puede apreciarse, por ejemplo, al notar que el valor de la mina flexible es cercano con niveles de volatilidad muy diferentes (7,5% y 12%).

Algo similar ocurre con la sensibilidad de los resultados respecto de la volatilidad del retorno por conveniencia, como puede apreciarse en la Figura 3.12. La respuesta del valor de la mina no es lineal con respecto a diferentes niveles de volatilidad del retorno por

conveniencia. Cuando la volatilidad es muy baja o muy alta, el valor de la mina tiende a ser mayor, aún sin considerar flexibilidades, debido a cambios en el nivel esperado de precios, tal como puede deducirse del precio futuro del cobre, que corresponde a:

$$\ln F(S, \delta, T) = \ln(S) - \delta \frac{1-e^{-kT}}{k} + \left( r - \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{k^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2 \rho}{k} \right) T + \frac{1}{4} \sigma_2^2 \frac{1-e^{-2kT}}{k^3} + \left( \hat{\alpha} k + \sigma_1 \sigma_2 \rho - \frac{\sigma_2^2}{k} \right) \frac{1-e^{-kT}}{k^2} \quad (25)$$

Donde  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{k}$ . La ecuación se desprende de las ecuaciones (21) e (22) y del hecho de que el precio tiene una distribución log-normal, con lo que  $F(x_t, T) = E_t^Q(x_T) = e^{E_t^Q(x_T) + \frac{1}{2} Var_t^Q(x_T)}$ .

Esto implica, por ejemplo, que el valor esperado del precio, ajustado por riesgo, en 15 años plazo es de aproximadamente 47 c/lb cuando el precio inicial es de 50 c/lb, con los parámetros originales, pero que cuando la volatilidad del retorno por conveniencia es de 1%, el valor esperado es de aproximadamente 55 c/lb, en tanto con una volatilidad de 12% es de aproximadamente 49 c/lb.

En la Figura 3.13 se presenta el efecto sobre el valor de la mina de diferentes valores iniciales del retorno por conveniencia. A diferencia de las anteriores sensibilizaciones, los cambios en el valor inicial del retorno por conveniencia no implican diferentes modelos de precio, sino que describen diferentes situaciones del mercado. Cuando el retorno por conveniencia está sobre el promedio de largo plazo, el valor esperado del precio del cobre en el corto plazo es inferior al precio actual, y viceversa. El retorno por conveniencia describe, de esta manera, la escasez actual del mercado y genera reversión a la media. En plazos más largos, sin embargo, el mercado está dominado por la tendencia de largo plazo del precio. El comportamiento del valor de la mina puede entenderse cómo el que se obtiene con diferentes precios de largo plazo, dependiendo de si se considera que el precio actual está en la parte alta, baja o media del “ciclo”. Adicionalmente, puede observarse que cuando el mercado está estrecho, y el retorno por conveniencia es por lo tanto elevado, las ganancias de flexibilidad son comparativamente importantes, puesto que la posibilidad de abandonar la mina, en particular, adquiere valor al permitir acotar pérdidas en el futuro de la operación.

En la Figura 3.14 se presentan resultados de valorización con diferentes niveles de retorno por conveniencia de largo plazo, que afectan la tendencia de largo plazo del precio, como se desprende de la ecuación (21).

En la Figura 3.15 se puede observar el valor de la mina bajo diferentes niveles de correlación entre las innovaciones del precio y las innovaciones del retorno por conveniencia. Nuevamente a partir de la ecuación (21) puede advertirse que la correlación afecta la tendencia de largo plazo del precio (ajustado por riesgo), y que a mayor correlación, menor es la tendencia. Por ejemplo, en el largo plazo, con una correlación de

0.818 la tendencia del precio es de 0.85%, mientras que con una correlación de 0.2, la tendencia es de 5% anual.

Se presentan también los efectos de diferentes niveles de velocidad de reversión a la media. Como se aprecia en la Figura 3.16, el valor de la mina es mayor cuando la velocidad de retorno a la media es menor.

Las anteriores sensibilizaciones suponen diferentes características del proceso de precios del cobre o, en el caso del retorno por conveniencia inicial. Alternativamente, puede examinarse el efecto de cambios en los parámetros de la mina, presentados en la Tabla 2-1, sobre su valor.

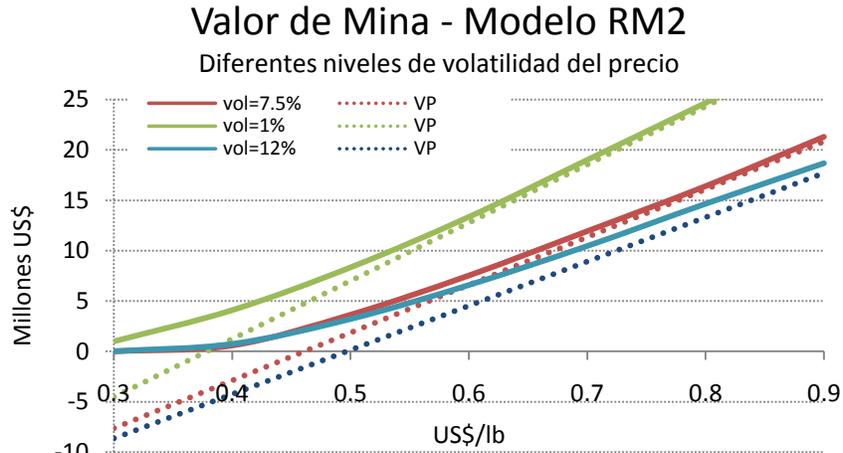
En primer lugar, en la Figura 3.17 se compara el valor de la mina cuando los costos son los de la Tabla 2-1, con una mina que no tiene costos de cierre temporal. Puede observarse como con la reducción de costos se incrementa fuertemente el valor de la flexibilidad. A los costos de cierre temporal de la Tabla 2-1, en rigor, el valor de flexibilidad viene dado casi exclusivamente por la posibilidad de abandono temprano de la operación, en tanto, cuando los costos de cierre temporal son mínimos, la posibilidad de cerrar temporalmente añade más valor al proyecto. La importancia que puede tener esta flexibilidad adicional es, por lo tanto, una cuestión empírica que dependerá de la estructura de costos del proyecto.

Otro aspecto de evaluación de la mina por medio del AOR es la determinación de una política óptima de operación, que en este caso indica cuándo resulta óptimo cerrar temporalmente una mina, y cuándo reabrir una mina cerrada temporalmente, así como en qué momento es óptimo el abandono definitivo de la mina. La política óptima de operación depende del estado actual de los factores de riesgo, en este caso, del precio del cobre, y del retonó por conveniencia. En la Figura 3.18 se presenta la diferencia entre el valor de una mina abierta y una mina cerrada que tiene reservas completas ( $Q_{max}$ ). La diferencia no puede ser superior al costo de cierre y reapertura. Como se puede apreciar, con los parámetros usado, cuando el precio es inferior a aproximadamente 0.48 US\$/lb, conviene cerrar temporalmente la mina abierta, en tanto si el precio es superior a aproximadamente 0.64 US\$/lb, conviene reabrir la mina cerrada temporalmente. Estos valores son dependientes del nivel de reservas con que cuenta la mina. También dependen del “ciclo” del mercado, esto es, si en el corto plazo se espera un alza o una baja de precios, tal como se aprecia en la Figura 3.18. Cuando el estado inicial del retorno por conveniencia es cero, y por lo tanto existe un mercado “holgado”, y se espera una recuperación del precio en el corto plazo, se obtienen diferentes niveles de precios de cierre y reapertura, aunque las variaciones son menores<sup>14</sup>.

---

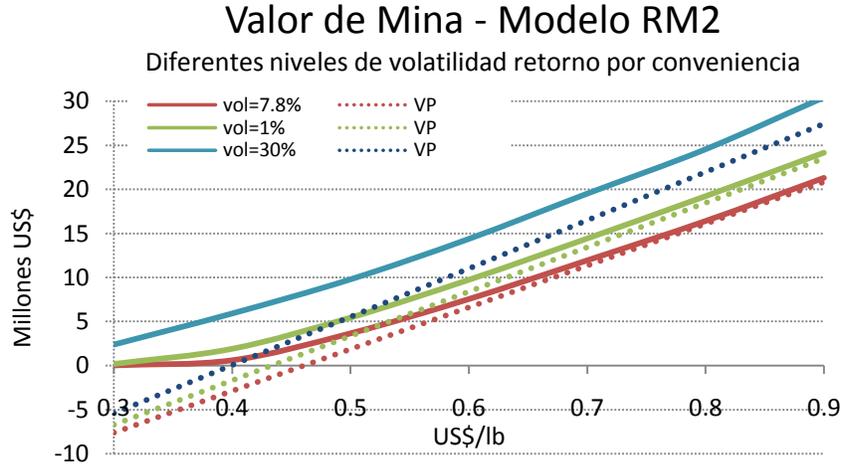
<sup>14</sup> Los resultados de la simulación son “ruidosos”, pero pueden obtenerse con mayor precisión al costo de usar un número mayor de trayectorias, y un mayor número de precios iniciales.

Figura 3.11



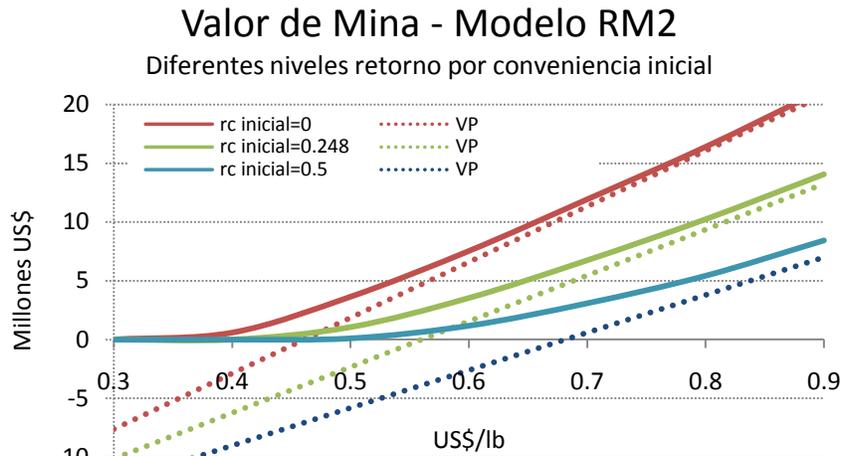
Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 3 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-3, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años. Retorno por conveniencia inicial igual a 0.

Figura 3.12



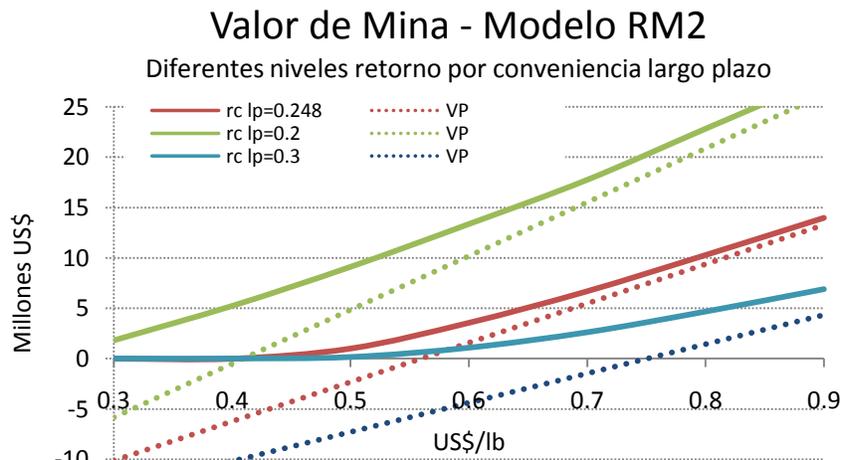
Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 3 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-3, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años. Retorno por conveniencia inicial igual a 0.

Figura 3.13



Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 3 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-3, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años.

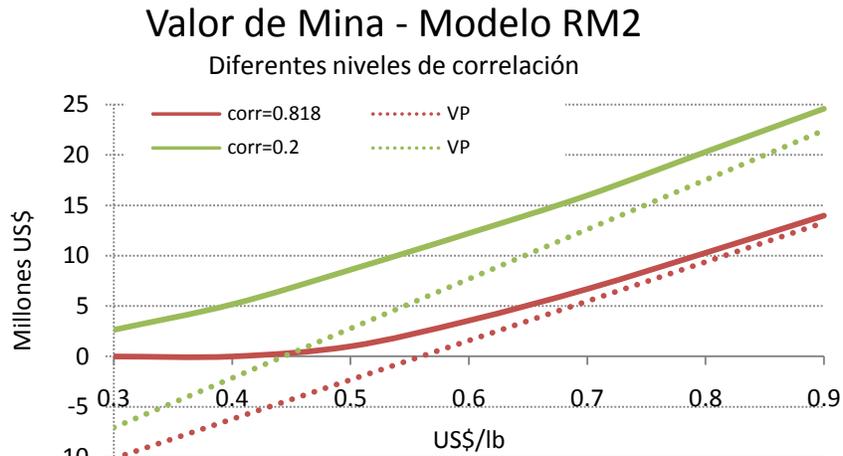
Figura 3.14



Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 3 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-3, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años.

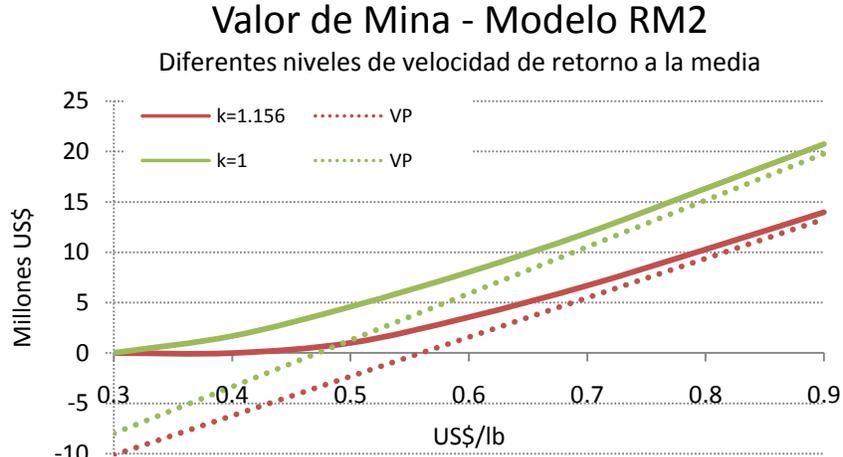
Retorno por conveniencia inicial igual a retorno por conveniencia de largo plazo.

Figura 3.15



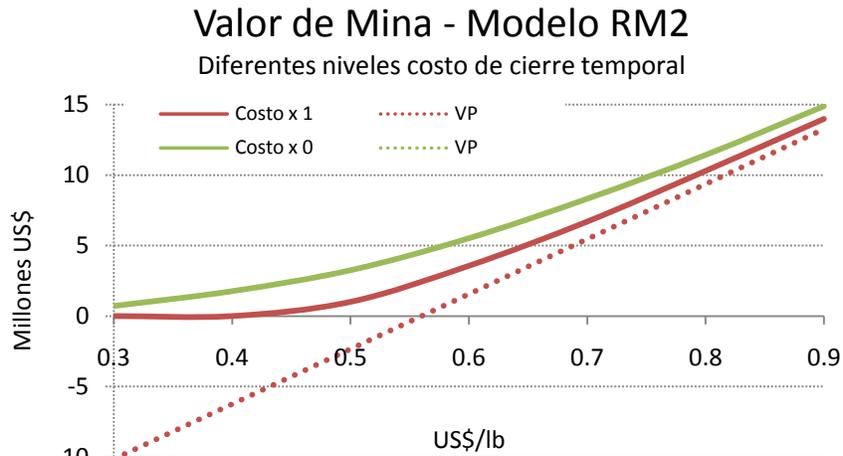
Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 3 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-3, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años. Retorno por conveniencia inicial igual a retorno por conveniencia de largo plazo.

Figura 3.16



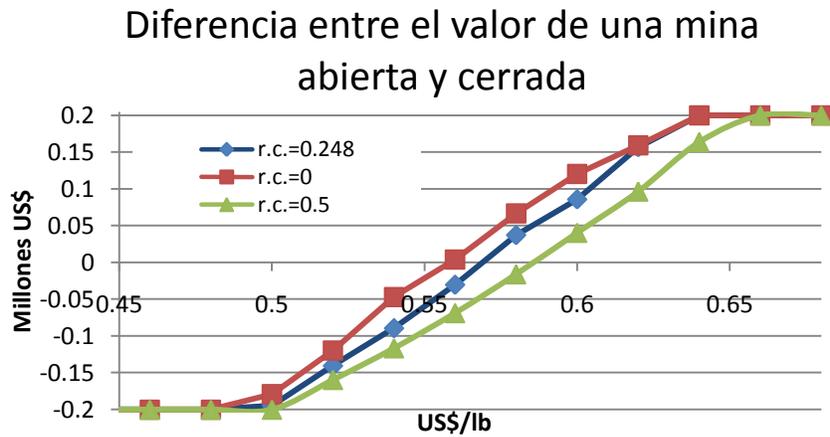
Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 3 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-3, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años. Retorno por conveniencia inicial igual a retorno por conveniencia de largo plazo.

Figura 3.17



Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 3 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-3, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años. Retorno por conveniencia inicial igual a retorno por conveniencia de largo plazo.

Figura 3.18



Datos de la simulación: 10.000 trayectorias y polinomio de grado 3 para estimación de valor de continuación. Modelo de precio de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3-3, en tanto los parámetros de la mina son los de la Tabla 2-1, con tres oportunidades de cambio de estado al año y una duración de la concesión de 50 años. Costo de mantención igual a cero.

## Capítulo 4 CONCLUSIÓN

Los resultados obtenidos muestran la dependencia que tiene el valor de un proyecto minero de la naturaleza estocástica del proceso del precio del cobre, y puede apreciarse como variaciones en los parámetros que la determinan afectan la valorización de un proyecto minero.

Por otro lado, los resultados muestran la forma en que la flexibilidad operacional puede agregar valor a un proyecto minero, especialmente en los casos en que los márgenes son menores.

En términos de la metodología presentada, la potencial superioridad de la evaluación de proyectos mineros por medio del análisis de opciones reales se sustenta en dos aspectos relacionados: el correcto ajuste por riesgo, de acuerdo a las características de cada uno de los componentes de los flujos de caja y factores de riesgo involucrados, y la cuantificación del valor que añade la flexibilidad operacional a los proyectos. Ambos aspectos están relacionados porque la flexibilidad implica cambios en el riesgo de los proyectos, que no es posible capturar adecuadamente con una única tasa de descuento.

Para modelos de opciones reales relativamente simples existen diversas alternativas de solución (incluyendo soluciones analíticas), pero en la medida en que los modelos se vuelven más realistas, obtener soluciones puede ser una tarea lenta y compleja. La virtud de la metodología presentada y empleada en este trabajo (“LSM”) es su relativa simplicidad y la facilidad con que puede extenderse a modelos más completos de un proyecto minero. El tercer modelo considerado, de reversión a la media de dos factores, que parece reflejar mejor que los otros dos la realidad empírica del mercado del cobre, puede implementarse con relativa facilidad bajo la metodología presentada y resulta clara la forma en que se podrían incorporar otros factores de riesgo, como la evolución incierta de las reservas, o de los costos de producción, o la consideración de otras formas de flexibilidad que pueden resultar interesantes de evaluar en virtud de la evidencia que se tiene de la minería del cobre, como expansiones sucesivas, o variaciones en los niveles de producción.

Un aspecto importante, y que no se ha tratado en el presente trabajo, es la estimación de los modelos de precio del cobre. Los dos primeros modelos presentados tienen problemas evidentes respecto de características conocidas del mercado de futuros del cobre (como el efecto “Samuelson”). El modelo de reversión a la media de dos factores presentado, por su parte, a pesar de representar correctamente el comportamiento del mercado de futuros del precio del cobre, por ejemplo, en términos de error de predicción y de la estructura de volatilidad de los futuros, como se describe en (Schwartz 1997), también presenta algunos problemas<sup>15</sup>. Sin embargo, lo importante es en qué medida se ajusta a

---

<sup>15</sup> Como la posibilidad de un retorno por conveniencia negativo, que podría implicar la existencia de oportunidades de arbitraje (Ribeiro y Hodges 2004), o el hecho de que la varianza del precio y del retorno

las necesidades del problema que se enfrenta. Tal vez la dificultad más importante sea que diferentes modelos pueden llegar a un buen ajuste de los datos, pero implicar diferencias significativas cuando se intenta extrapolar. En particular, los modelos presentados usan información del mercado de futuros para identificar los parámetros del modelo y las variables de estado no observables, pero el horizonte en que se transan los contratos de futuros es muy corto en comparación a la duración de un proyecto minero típico. Adicionalmente, estos modelos incluyen variables de estado no-observables (como el retorno por conveniencia) que es necesario estimar por medio de metodologías relativamente sofisticadas (como la aplicación del filtro de Kalman).

Otra ventaja del análisis de opciones reales a través de la metodología presentada es la identificación de las políticas óptimas de operación, vale decir, los valores de las variables de estado que gatillan cambios en el estado de operación de una mina.

En resumen, las ventajas que se desprenden de la aplicación de la metodología son: un ajuste consistente de los flujos de caja al riesgo, valorización de la flexibilidad operacional, posibilidad de extensión a modelos más realistas de un proyecto minero, e identificación de políticas óptimas de operación.

Entre las desventajas puede citarse la dificultad de selección y estimación de los modelos de precios, pero esta dificultad parece ser inherente al ejercicio de evaluación de proyectos mineros, independientemente de la metodología que se use.

---

por conveniencia sea constante, lo que no se corresponde con resultados teóricos de la teoría de almacenaje ("storage").

## TRABAJOS CITADOS

Alesii, Giuseppe. «Assessing Least Squares Monte Carlo for the Kulatilaka Trigeorgis General Real Options Pricing Model.» IAC Report Series n.147, Istituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone", 2008.

Brennan, Michael J., y Eduardo S. Schwartz. «Evaluating Natural Resource Investments.» *The Journal of Business* 58, nº 2 (1985): 135-157.

Brook Hunt. *Mine Costs*. Londres: Macenzie Wood, 2009.

Cortazar, Gonzalo. «The valuation of natural resources.» En *Real options and business strategy: Applications to decision making*, editado por Lenos Trigeorgis, 263-278. London: Risk Books, 1999.

Cortazar, Gonzalo, Miguel Gravet, y Jorge Urzua. «The valuation of multidimensional American real options using the LSM simulation method.» *Computers & Operations Research*, nº 35 (2006): 113 – 129.

Dixit, Avinash K., y Robert S. Pindyck. *Investment under uncertainty*. New Jersey: Princeton university Press, 1994.

Gamba, Andrea. *Real Options Valuation: A Monte Carlo Approach*. Documento de Trabajo, Verona: Universidad de Verona, 2003.

Gibson, Rajna, y Eduardo S. Schwartz. «Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims.» *The Journal of Finance* 45, nº 3 (1990): 959-976.

Gravet, Miguel A. *Evaluación de Opciones Reales mediante Simulación: el Método de los Mínimos Cuadrados*. Tesis de Magister, Santiago: Pontificia Universidad Católica de Chile, 2003.

Longstaff, F. A., y E. S. Schwartz. «Valuing American options by Valuing American options by.» *The Review of Financial Studies* 14 (2001): 113–147.

Samis, Michael, Graham A. Davis, David Laughton, y Richard Poulin. «Valuing uncertain asset cash flows when there are no options: A real options approach.» *Resources Policy*, nº 30 (2006): 285-298.

Schwartz, Eduardo S. «The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging.» *The Journal of Finance* 52, nº 3 (1997): 923-973.

Schwartz, Eduardo S. «Valuing Long-Term Commodity Assets.» *Financial Management* 27, nº 1 (1998): 57-66.

Schwartz, Eduardo S., y James E. Smith. «Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices.» *Management Science* 46, nº 7 (2000): 893–911.

Slade, Margaret E. «Managing projects flexibly: an application of real-option theory.» *Journal of Environmental Economics and Management*, nº 41 (2001): 193-233.

Urzúa, Jorge L. *Valorización de Opciones Reales Multidimensionales mediante Simulación de Montecarlo utilizando el Algoritmo LSM*. Tesis de Magister, Santiago: Pontificia Universidad Católica de Chile, 2004.

Zhang, Meimei, Richard H. Middleton, Peter M. Stone, y Merab Menabde. «A reactive approach to mining project evaluation under price uncertainty.» *APCOM 2007 – 33 International Symposium on Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry*. Santiago, 2006. 709-716.